ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Ерқара Жолдыбайұлы Айдос

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА-1

Өңделіп, толықтырылып алтыншы басылуы

Алматы, 2015

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
А 31

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі оқулық ретінде ұсынған

***Пікір жазғандар**:*

Тоқыбетов Ж.	–	ҚазМУ «Математикалық анализ» кафедрасы, ф.-м.ғ.к., профессор;
Сақабеков А.	–	ҚБТУ математика кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., профессор;
Мухамбетжанов С.	**–**	Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, ф.-м.ғ.д., проф;
Төреқожаев Ә.Н.	–	Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ «Қолданбалы механика және Машиналар құрылымдарының негіздері» кафедрасының меңгерушісі, ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰИА және Нью-Йорк Академиясының академигі

Айдос Е.Ж.
А 31 **Жоғары математика-1**: Оқулық. – 3 кітапта. /Е.Ж.Айдос. – Алматы: Бастау», 2015. 1-кітап. – 320 б.

ISBN 978-601-281-137-7 (к.1)
ISBN 978-601-281-136-0

Алдыңыздағы кітап – жоғары математика пәні бойынша техникалық жоғары оқу орындарының бакалавриат деңгейіндегі типтік оқу бағдарламасына сәйкес оқытудың кредиттік жүйесіне арналып жазылған ***үш бөлімнен тұратын кітаптарымыздың біріншісі***. Бұл кітапта жоғары математиканың «Сызықтық алгебра, векторлық алгебра және аналитикалық геометрия элементтері» атты тараулары қарастырылған. Әрбір тақырып мынадай құрылымда жазылған**:** дәріске арналған теориялық материал; сұрақтар мен тапсырмалар; студенттердің өзбетінше орындауына арналған 30 нұсқадан тұратын үй тапсырмалары (ҮТ); үй тапсырмаларын орындау үлгілері. Кітап техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне мен оқытушыларына арналған.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-601-281-137-7 (к.1)
ISBN 978-601-281-163-0

Алғы сөз

Техникалық жоғары оқу орындарының бакалавриат деңгейіндегі оқу бағдарламаларына сәйкес жазылған үш бөлімнен тұратын оқулықтарымыздың бірінші бөлімінде сызықтық алгебра, векторлық алгебра, аналитикалық геометрия элементтері және жоғары алгебраның қажетті материалдары қамтылған. Кітапты жазуда, біз әрине, білім беру саласында қолданылып жүрген, классикалық үлгідегі оқулықтар мен оқу құралдарының материалдарын кеңінен пайдаландық. Бірақ оларды сұрыптап талдап, сын көзбен қарай отырып, кейбір теориялық мәселелерге өзіміздің көзқарасымызға сай өзгерістер енгіздік. Мысалы, геометриялық теоремаларды дәлелдеуде, геометриялық есептерді және т.с.с. сұрақтарды шешуде тиімді роль атқаратын вектор ұғымы мен векторлық алгебраның қажетті аппараты көрнекті геометриялық объект арқылы да (R^n, $n=1,2,3$ кеңістіктерінде), аксиоматикалық құрылым арқылы да қарастырылады.

Кітап, оқытудың бұрынғы традициялық әдісі мен кредиттік технологиялық оқыту әдісін ұштастыра отырып жазылған. Оқушы мен оқытушының қолдануына ыңғайлы болуы үшін, оқулықта лекциялық курс, практикалық есептер, студенттердің өз бетінше орындауына арналған 30 варианттан тұратын үй тапсырмалары (ҮТ), ҮТ шығару үлгілері, аралық бақылауға арналған сұрақтар берілген және осы, алтыншы басылымда бақылау жұмысына арналған есептер де қосылды. Теориялық бөлім Е.Ж.Айдостың 2003 ж. баспадан шыққан, ҚР ОҒМ оқулық ретінде бекіткен «Жоғары математика (қысқаша курс)» атты оқулығынан алынған. Ал студенттердің үй тапсырмалары үшін, А.П.Рябушко және т.б. авторлардың «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике» атты үш бөлімнен тұратын оқу құралдарында берілген есептерді басқа қажетті материалдармен толықтырып, оларды орындау үлгілеріне кейбір әдістемелік өгерістер енгізе отырып пайдаландық. Теоремалардың көпшілігі дәлелденген. Сонымен бірге материалдың математикалық қатандығын сақтай отырып, оны оқушыға түсінікті, жеңіл тілмен жеткізуге тырыстық.

Әрбір тарау параграфтарға бөлінген. Кейбір параграфтар пункттерге бөлінеді. Теорема дәлелдеуінің немесе мысалдарды шығарудың басталуы мен аяқталуын сәйкес ▼ және ▲ белгілерімен көрсетіп отырамыз. Үй тапсырмаларындағы нөмірлердің бірінші цифры тарауға сәйкес, ал екінші цифры осы тарауға арналған тапсырма нөмірін көрсетеді, мысалы 1.2 – ҮТ белгілеуі, бірінші тарау бойынша студенттерге берілетін екінші тапсырманы көрсетеді (әрбір тапсырмада бірнеше есеп болуы мүмкін).

Қазіргі кезде қазақша математикалық терминдер толық қалыптасып болмағандықтан, кітабымызда оқушының көңілінен шықпай жатқан терминдер бар болса, оларды бірігіп талқылауға дайынбыз. Біз қолданған математикалық терминдер 1999 ж. жарық көрген [11] сөздіктен алынды.

Автор

1. СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§ 1.1. Анықтауыштар және матрицалар

1.1.1. Анықтауыш және матрица ұғымдары. Сызықтық алгебра бірінші дәрежелі теңдеулер жүйесін зерттейді. ***n* *белгісізі бар* *m* *сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі келесі түрде жазылады:***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Мұндағы: $x_1, x_2, ..., x_n$ – жүйедегі белгісіздер;

a_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ – белгісіздердің коэффициенттері;

b_i, $i = 1, 2, ..., m$ – бос мүшелер деп аталады.

Жүйе коэффициенттерінен тікбұрышты кесте құрауға болады. Кестені белгілеуге келесі символдардың бірі қолданылады:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} \ a_{12} \dots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots \ a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} \ a_2 \dots \ a_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \dots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots \ a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} \ a_{m2} \dots \ a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\| = \left(a_{ij} \right). \qquad (2)$$

Бұл кестені m жол мен n бағаннан құралған $m \times n$ ***өлшемді матрица деп атайды*** және үлкен латын әріптердің: A,B,C,…X,Y,… бірімен белгілейді. Мұндағы a_{ij}, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ... n$ матрица элементі деп аталады (ол i-ші жол мен j-ші бағанның қиылысуында тұрады).

Егер $n = m$ болса, онда (2) кесте келесі түрге ие болады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \dots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots \ a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} \ a_{n2} \dots \ a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2')$$

және ол *n-ші ретті квадрат матрица* деп аталады (n - *квадрат* матрицаның *реті* деп аталады). Мұндағы a_{ii}, $i=1,2,...,n,$ – *бас диагональ*, ал a_{1n}, $a_{2(n-1)},...,a_{n1}$ – *бүйір диагональ* элементтері деп аталады.

Дербес жағдайда, $n = m = 2$ болса, (1) жүйе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

түрінде жазылады. Бұл жүйенің коэффициенттері

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

түріндегі екінші ретті квадрат матрицаны құрайды.

Егер $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ болса, онда (3) жүйенің шешімі

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \ . \tag{5}$$

Бұлардың ортақ бөлімі, (4) матрица элементтері арқылы өрнектеліп тұр: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *саны – бас диагональ элементтерінің көбейтіндісі минус бүйір диагональ элементтерінің көбейтіндісі*. Бұл сан, (4) **матрицаның анықтауышы** (немесе **детерминанты** (ағыл. анықтауыш)) деп аталады. (4) матрица екінші ретті болғандықтан, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ саны да екінші ретті анықтауыш деп аталады. (4) матрицаның анықтауышын белгілеу үшін матрицадағы жай жақшаның орнына тік таяқшаларды қолданады және анықтауышты $detA$ немесе Δ арқылы белгілейді:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ . \tag{6}$$

Мысалы, 1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 - 5\cdot 4 = -6;$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 10.$

Енді (5) теңдіктерді келесі түрде жаза аламыз:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

(3) жүйені (7) формулалар арқылы шешу **Крамер ережесі** деп аталады.

Үш белгісізі бар үш теңдеу жүйесін қарастырайық (n=m=3):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{8}$$

Бұл жүйенің коэффициентерінен келесі *үшінші ретті* (n = m = 3) *квадрат матрицаны* құрауға болады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(8) жүйенің, мысалы, x_1-ші белгісізін табу үшін, осы үш теңдеудің екі жағын сәйкес $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ сандарына көбейтіп, шыққан нәтижелерді мүшелеп қоссақ, келесі теңдікті аламыз:

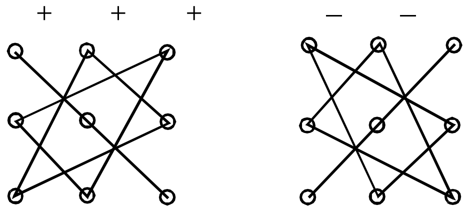
$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 =$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}. \tag{10}$$

Мұндағы x_1 айнымалдың коэффициентін (9) *матрицаның (үшінші ретті) анықтауышы* деп атайды. Сонымен

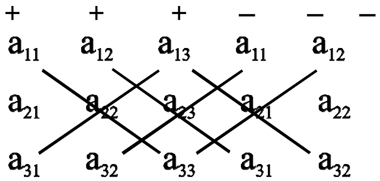
$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (11)$$

(11) теңдіктегі қосылғыштарды келесі схема арқылы құрауға болады (оны **үшбұрыш** немесе **Саррюс ережесі** деп атайды):



немесе



Мысалы,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 2\cdot4\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 = 0\,.$$

(11) теңдіктегі әрбір қосылғыш (таңбасымен қоса) **анықтауыш мүшесі** деп аталады. Әрбір мүшеде әрбір жол мен әрбір бағанның бір-бірден элементтері бар. Бұл элементтерді олардың бірінші индексінің (элемент жатқан жол нөмірінің) өсу ретімен орналастыруға болады. (11) теңдік дәл осылай жазылған.

Анықтама. *A матрицасының жолдарын сәйкес бағандар етіп орын алмастырудан алынған A^{T} матрицасы* ***транспонирленген*** немесе ***аударылған матрица*** *деп аталады.*

A мен A^{T} *квадрат* матрицаларының элементтері бас диагональға салыстырғанда симметриялы.

Жолдарды бағандармен алмастыру амалы **транспонирлеу** немесе **аудару** деп аталады.

Δ анықтауышынан транспонирлеу арқылы алынған анықтауышты Δ^{T} арқылы белгілейміз.

Енді анықтауыштардың қасиеттерін қарастырамыз.

1.1.2. Анықтауыштардың қасиеттері. Оқушының түсінуіне жеңілдеу болуы үшін, алғашқы қасиеттерді екінші ретті анықтауыштар үшін қарастырамыз. Олар үшінші, жалпы, n-ші ретті анықтауыштар үшін де орындалады.

1°. Анықтауыш пен оны аудару арқылы алынған анықтауыш өзара тең: $\Delta = \Delta^{\mathrm{T}}$. Мысалы,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta^T \quad \text{(көз жеткізіңіз);}$$

Бұдан әрі ыңғайлылық үшін жол мен бағанды бір сөзбен ***қатар*** деп атайтын боламыз.

2°. Анықтауыштың параллель қатарларын өзара орын алмастырса анықтауыш таңбасы өзгереді, мысалы,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \quad \text{(көз жеткізіңіз).}$$

3°. Анықтауыштың қандай да бір қатарының барлық элементтері k санына көбейтілсе, анықтауыш мәні k есе артады. Басқаша айтқанда, кез келген қатардың ортақ көбейткішін анықтауыш алдына шығаруға болады. Мысалы,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{(көз жеткізіңіз).}$$

Назар аударыңыз. 3° қасиеттен, анықтауышты санға көбейту үшін оның қандай да бір қатар элементтерін осы санға көбейту керек екенін көреміз.

4°. Анықтауыштың қандай да бір қатарының барлық элементтері нөлге тең (нөл қатар) болса, анықтауыш нөлге тең, мысалы,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0.$$

5°. Анықтауыштағы параллель қатарлардың сәйкес элементтері тең болса, анықтауыш нөлге тең:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{12} \cdot a_{11} = 0.$$

3° және 5° қасиеттерден келесі қасиет шығады.

6°. Анықтауыштағы параллель қатарлардың сәйкес элементтері пропорционал болса, анықтауыш нөлге тең, мысалы,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

Келесі қасиеттерді үшінші немесе n-ші ретті анықтауыштар үшін (12 *б. қараңыз*) *тұжырымдайық.*

Алдымен келесі ұғымдарды енгізейік.

Анықтама. Анықтауыштың a_{ij} ***элементінің миноры деп,*** осы элемент тұрған жол мен бағанды алып тастап, оның қалған қатарларынан құралған анықтауышты айтады және оны M_{ij} арқылы белгілейді.

Мысалы, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасының анықтауышының a_{22} элементінің миноры:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} .$$

Анықтама. *Анықтауыштың a_{ij} элементінің* ***алгебралық толықтауышы*** *немесе* ***адъюнкті*** *деп $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ санын айтады.*

Мұнда $(-1)^{i+j}=\pm 1$ ескерсек, $A_{ij}=\begin{cases} M_{ij}, & \text{егер } \ i+j \ \text{ жуп болса,} \\ -M_{ij}, & \text{егер } \ i+j \ \text{ так болса.}\end{cases}$

Мысал. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ болса, онда

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot 9-3\cdot 7=-12 \ .$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-(1\cdot 8-2\cdot 7)=6 \ .$$

Назарыңызға! A_{ij} мен M_{ij} – анықтауыштарында бастапқы анықтауыштың *і-ші* жолы мен *j-ші* бағаны жоқ.

Келесі қасиет реті кез келген анықтауышты анықтауға мүмкіндік береді.

7°. Анықтауыштың қандай да бір қатарының элементтері мен олардың алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыш шамасына тең:

$$\Delta=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}, \quad i=1,2,3; \tag{12}$$

$$\Delta=\sum_{i=1}^{3}a_{ik}A_{ik}=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+a_{3k}A_{3k}, \quad k=1,2,3. \tag{13}$$

▼ Бұл қасиетті 3-ші ретті анықтауыштың, мысалы, 3-ші жол элементтері үшін дәлелдейік.

$$a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23} \end{vmatrix}-a_{32}\cdot\begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23} \end{vmatrix}+a_{33}\cdot\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})+a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\Delta. \ ▲$$

Мысалы, (12) формуланы i = 1-нші жол үшін қолданып, келесі анықтауышты есептейік

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3(4\cdot 8 - 5\cdot 7) = -3 + 12 - 9 = 0 .$$

(12) қосынды – **анықтауыштың *i*-ші жол элементтері бойынша жіктелуі,** ал (13) қосынды – **анықтауыштың *k*-ші баған элементтері бойынша жіктелуі** деп аталады.

1-салдар. Анықтауыштың қандай да бір қатарының бір элементінен басқа элементтері нөл болса, анықтауыштың жіктелімі жалғыз қосылғыштан тұрады. Мысалы, $a_{21} = a_{31} = 0$ болса, онда $\Delta = a_{11}A_{11}$.

2-салдар. Егер анықтауыштың *бас диагоналінің* астындағы немесе үстіндегі барлық элементтер нөлге тең, яғни $a_{kl} = 0,\ k>l$ немесе $a_{kl} = 0,\ k<l$ болса, онда анықтауыш – бас диагональ элементтерінің көбейтіндісіне тең: $\Delta = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$. Ал егер *бүйір диагоналінің* үстіндегі немесе астындағы барлық элементтер нөлге тең болса, онда $\Delta = -a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$.

2-салдарды 1-салдардан алуға болатынына көз жеткізіңіз.

Егер $n-1$-нші ретті матрицаның анықтауышын есептеу тәсілі белгілі болса, онда ***n-ші ретті*** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *матрицасының* ***анықтауышы*** деп, 7^0 *қасиет бойынша есептелетін*

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},\quad i = 1,2,\dots,n, \tag{14}$$

немесе

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik},\quad k = 1,2,\dots,n, \tag{14'}$$

санын айтады және ол сан келесі символмен белгіленеді:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Назар аударыңыз! 2-*салдар* n-ретті анықтауыштың бас диогональ элементтері үшін $\Delta=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$, ал бүйір диогональ элементтері үшін $\Delta=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ a_{1n}\cdot a_{2(n-1)}\cdot\ldots\cdot a_{n1}$ – түрінде жазылады.

Мысал. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 8 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 9 & 5 & 9 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\left(-1\right)^{\frac{6(6-1)}{2}}1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=-720.$

8°. Анықтауыштың қандай да бір қатар элементтері мен осы қатарға параллель басқа қатардың сәйкес элементтерінің алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең.

▼ **Мысалы,**

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\ldots+a_{2n}A_{1n} \tag{15}$$

өрнегінің мәні (анықтауыштың екінші жол элементтері мен бірінші жолдың сәйкес элементтерінің алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы) нөлге тең болатынын көруге болады. Шынында да, (15) өрнекті келесі анықтауыш ретінде жаза аламыз

$$a_{21}\cdot A_{11}+a_{22}\cdot A_{12}+...+a_{2n}\cdot A_{1n}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Бұл анықтауыштың бірінші және екінші жолдарының сәйкес элементтері өзара тең, сондықтан ол анықтауыш нөлге тең, олай болса, $a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+...+a_{2n}A_{1n}=0.$ ▲

9°. Егер анықтауыштың белгілі бір қатарының әрбір элементі екі қосылғыштың қосындысы етіп берілсе, онда анықтауыш екі анықтауыштың қосындысына тең. Бірінші анықтауыштың сәйкес қатары бірінші қосылғыштардан, ал екінші анықтауыштың сәйкес қатары екінші қосылғыштардан тұрады да, бұл екі анықтауыштың қалған қатарларының элементтері бастапқы анықтауыштың сәйкес элементтеріне тең болады.

Мысалы, ((7) қасиетті қараңыз):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j}+b_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2j}+b_{2j} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & ... & a_{nj}+b_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}+b_{ij}\right)A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}A_{ij}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}... & a_{1j}... & a_{1n} \\ a_{21}... & a_{2j}... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{n1}... & a_{nj}... & a_{nj} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}... & b_{1j}... & a_{1n} \\ a_{21}... & b_{2j}... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{n1}... & b_{nj}... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

10°. Анықтауыштың қандай да бір қатар элементтерін кез келген k санына көбейтіп, осы қатарға параллель кез келген қатардың сәйкес элементтеріне қоссақ анықтауыштың мәні өзгермейді.

▼ Бұл қасиеттің дұрыстығын 9°, 5° және 3° қасиеттерді қолдана отырып көз жеткізуге болады. ▲

Мысалы, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ анықтауышын бірінші баған элементері бойынша жіктеп есептеу керек болсын.

▼ Онда алдын ала a_{21}, a_{31}, a_{41} элементтерінің орындарында нөл алған жөн. Ол үшін 7° қасиет бойынша 1-ші жолды -5, -3 және -2 сандарына көбейтіп, нәтижелерін сәйкес, 2-ші, 3-ші және 4-ші жолдарға қоссақ

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ болады. Енді 7°, 5° және 6° қасиеттерді қолданамыз:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -2 & -4 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$ ▲

Тақырыпқа арналған сұрақтар мен тапсырмалар:

1. Анықтауыш ұғымын кез келген матрица үшін қолдануға болады ма? Квадрат матрицаның анықтауышын қалай есептейді?
2. Анықтауыштың a_{ij} элементінің миноры және алгебралық толықтауышы дегеніміз не?
3. Анықтауыштардың қандай негізгі қасиеттері бар?
4. Үшінші ретті анықтауышты қалай есептеуге болады?
5. Реті үштен үлкен анықтауыштарды есептеу әдістері қандай? Мысалдар келтіріңіз.

Тақырыпқа арналған есептер:

1. Есептеу керек:

а) $\begin{vmatrix} -b & -1 \\ b^2 & b \end{vmatrix}$. (**Ж:** 0); **ә)** $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & -a^2 \end{vmatrix}$. (**Ж:** $-2a^2$);

б) $\begin{vmatrix} 2\sin x & 0 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}$. (**Ж:** $\sin 2x$); **в)** $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$. (**Ж:** $\cos 2x$);

г) $\begin{vmatrix} 1 & \sin x \\ \sin x & 1 \end{vmatrix}$. (**Ж:** $\cos^2 x$); **ғ)** $\begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ \cos x & 1 \end{vmatrix}$. (**Ж:** $\sin^2 x$).

2. Теңдеуді шешу керек:

а) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. (**Ж:** 0,5); **ә)** $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. (**Ж:** шешімі жоқ);

б) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. (**Ж:** $(-\infty,\ +\infty)$).

3. Есептеу керек:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. (**Ж:** -3); **ә)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. (**Ж:** 10).

б) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 17 & 29 \\ 1 & -4 & 6 & 7 \\ 23 & -87 & 9 & 97 \end{vmatrix}$. (**Ж:** 0). **в)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -3 & 9 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$. (**Ж:** 0);

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. (**Ж:** 20); **ғ)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 9 & -5 \end{vmatrix}$. (**Ж:** –10);

д) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ -6 & 9 & 3 & 15 \end{vmatrix}$. (**Ж:** 0); **е)** $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & -6 & 8 \\ 15 & 5 & 20 & 25 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$. (**Ж:** 1105).

1.1–ҮТ

1. а) Берілген Δ анықтауышының a_{i2}, a_{3j} элементтерінің минорлары мен алгебралық толықтауыштарын табу керек;

б) Берілген анықтауышты келесі үш тәсілмен есептеу керек:

1) i-ші жол элементтері бойынша жіктеу арқылы;

2) j-ші баған элементтері бойынша жіктеу арқылы;

3) алдын ала i-ші жолда нөлдер алу арқылы.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{i=4, j=1.}$

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{i=3, j=3.}$

1.3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{i=4, j=1.}$

1.4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{i=1, j=3.}$

1.5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{i=2, j=4.}$

1.6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{i=1, j=2.}$

1.7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{i=2, j=3.}$

1.8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{i=3, j=1.}$

1.9. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4, j=3$.

1.10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4, j=2$.

1.11. $\begin{vmatrix} 5 & -31 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$, $i=3, j=4$.

1.12. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=1, j=2$.

1.13. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1, j=4$.

1.14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2, j=4$.

1.15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $i=1, j=3$.

1.16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3, j=2$.

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3, j=1$.

1.18. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $i=2, j=4$.

1.19. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$, **$i$=2, j=3.**

1.20. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, **$i$=4, j=3.**

1.21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, **$i$=1, j=2.**

1.22. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$, **$i$=3, j=2.**

1.23. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, **$i$=4, j=4.**

1.24. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, **$i$=3, j=2.**

1.25. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, **$i$=2, j=3.**

1.26. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, **$i$=4, j=1.**

1.27. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$, **$i$=3, j=4.**

1.28. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, **$i$=1, j=2.**

1.29. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, **1.30.** $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$,

***i*=4, *j*=4.** ***i*=2, *j*=2.**

1.1-ҮТ орындау үлгісі

№ 1. Берілген $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышының:

а) a_{12}, a_{32} элементтерінің минорлары мен алгебралық толық-тауыштарын табу керек;

б) Берілген анықтауышты келесі үш тәсілмен есептеу керек:

1) 1-ші жол элементтері бойынша жіктеу арқылы;

2) 2-ші баған элементтері бойынша жіктеу арқылы;

3) алдын ала 1-ші жолда нөлдер алу арқылы.

▼ **а)** a_{12} және a_{32} элементтерінің минорлары мен алгебралық толықтауыштарын табамыз:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16 = -18,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 12 - 12 - 8 = -20.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-18) = 18, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -(20) = 20.$$

б) 1) Анықтауышты бірінші жол элементтері бойынша жіктеп (7^0 қасиет), алынған үшінші ретті анықтауыштарды Саррюс ережесі бойынша есептейміз:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= -3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(8+2+4-4) - 2(-8-16+6+12+4-16) + (16-12-4+32) = 38.$$

2) Анықтауышты екінші баған элементтері бойынша жіктеп (7^0 қасиет), алынған үшінші ретті анықтауыштарды Саррюс ережесі бойынша есептейміз:

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-8+6-16+12+4-16) - 2(12+6-6-16) + (-6+16-12-4) = 38.$$

3) Анықтауыштың бірінші жолында нөлдер алу үшін 10°- қасиетті пайдаланамыз. Оны орындаудың бірнеше нұсқасы бар. Солардың бір нұсқасын көрсетейік. Анықтауыштың 3-ші бағанын кезегімен 3-ке және -2-ге көбейтіп, нәтижелерін сәйкес 1-ші және 2-ші бағанға қосамыз. Сонда бірінші жолдың бір элементінен басқа элементтері нөлге тең болады. Алынған анықтауышты бірінші жол элементтері бойынша жіктеп (7° қасиет), алынған үшінші ретті анықтауышты есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = = / \, 10^0$$

– қасиет бойынша, екінші жолды -5-ке көбейтіп бірінші жолға қосамыз да шыққан анықтауышты 1-ші баған элементтері бойынша жіктейміз/ $= \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-56+18) = 38.$ ▲

Назарыңызға! §1.1 тақырыбының соңғы мысалын да қараңыз.

§ 1.2. Матрицаларға амалдар қолдану

Матрицаларға жасалатын келесі амалдарды қарастырамыз: **матрицаны санға көбейту, матрицаларды қосу, матрицаларды көбейту және берілген матрицаға кері матрица табу**.

Алдымен келесі түсініктерді енгізейік.

Квадрат матрицаның бас диагональ элементтерінен басқа элементтердің барлығы нөлге тең болса, оны **диагональ матрица** дейді. n-ші ретті диагональ матрицаны келесі түрде жазуға болады: $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$. Мұнда $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$ болса, оны **бірлік матрица** деп атайды: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Барлық элементтері нөлге тең матрица **нөл матрица** деп аталады: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Назар аударыңыз! *Нөл матрица түсінігі кез келген тік бұрышты (квадрат емес) матрицалар үшін де енгізіледі.*

Өлшемдері бірдей және сәйкес элементтері өзара тең матрицалар **тең матрицалар деп аталады**: $A_{m\times n} = B_{m\times n}$.

Анықтама. $A=(a_{ij}),\ \ i=1,2,\dots,m;\ \ \ j=1,2,\dots,n$ ***матрицасы*** *мен* λ ***санының көбейтіндісі*** (λA) *деп, әрбір элементі* $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$ *тең* $C=(c_{ij}),\ \ i=1,2,\dots,m;\ \ j=1,2,\dots,n$ *матрицасын айтады.*

1-мысал. $5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10 & 15\\ 20 & 25 & 30\end{pmatrix}.$

Бұл амал үшін келесі қасиеттер орындалады:

1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ (*сандық көбейткіштерге қатысты ассоциативті*);

2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (*сандарды қосуға қатысты дистрибутивті*).

Сонымен бірге $1\cdot A=A,\ (-1)\cdot A=-A,\ \ 0\cdot A=0$ теңдіктері орындалады.

Анықтама. *Өлшемдері бірдей A және B матрицаларының* ***қосындысы*** *деп, әрбір элементі* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ *тең, өлшемі A (немесе B) өлшеміндей,* $C=(c_{ij})=A+B$ *матрицасын айтады.*

2-мысал. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 7 & 9 & 11\end{pmatrix}.$

Матрицаларды қосу амалы үшін келесі қасиеттер орындалады:

1) $A+B=B+A$ (*коммутативтік*);

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (*ассоциативтік*);

3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (*матрицаларды қосуға қатысты дистрибутивтік*).

Назар аударыңыз! *Матрицаларға жасалған* бұл *екі амал анықтауыштар үшін тек таңдалған бір қатар элементтеріне ғана қатысты орындалатын еді.*

Анықтама. $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *және* $B_{n\times p}=(b_{ij})$ ***матрицаларының көбейтіндісі*** *деп, әрбір* c_{ij} *элементі*

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\dots,m;\quad j=1,2,\dots p, \tag{1}$$

тең, басқаша айтқанда, c_{ij} элементі A матрицасының i-ші жолы мен B матрицасының j-ші бағанының сәйкес элементтерінің қос-қостан көбейтінділерінің қосындысына тең $C_{m\times p} = AB$ матрицасын айтады.

Назар аударыңыз! *Анықтамадан бірінші матрицаның бағандар саны екінші матрицаның жолдар санына тең болатын және тек сондай матрицаларды ғана көбейтуге болатынын көреміз.*

3-мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген.

Олардың AB және BA көбейтінділерін табу керек.

▼ $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 0 + 4\cdot 2 & 3\cdot 1 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ 2\cdot 1 + 3\cdot 3 & 2\cdot 2 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}.$$ ▲

Бұл мысалдан $AB \neq BA$, яғни ***матрицаларды көбейту коммутативті емес*** екені көрінеді.

Матрицаларды көбейту амалы келесі қасиеттерге ие:

1) $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативті*);

2) $(A+B)C = AC + BC$ (матрицаларды қосуға қатысты дистрибутивті);

3) ***Квадрат матрицалар*** үшін $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ теңдігі орындалады, яғни көбейтіндінің анықтауышы көбейткіштердің анықтауыштарының көбейтіндісіне тең. ***(СӨЖ:** Теңдікті $n = 2$ үшін дәлелдеу керек**)**.*

Сонымен бірге, кез келген ***квадрат А матрица*** үшін

$$AE = EA = A, \quad A\cdot 0 = 0\cdot A = 0,$$

яғни бірлік E матрица бір саны сияқты, ал нөл матрица нөл саны сияқты рөл атқарады.

§ 1.3. Кері матрица

Анықтама. *Егер* $AB = BA = E$, *(E – бірлік матрица) теңдіктері орындалатындай B матрицасы* ***бар болса,*** *онда ол A* ***матрицасына кері матрица*** *деп аталады және оны* A^{-1} *символымен белгілейді.*

Анықтама. *Анықтауышы нөлге тең емес квадрат матрица* ***нұқсанды емес*** *немесе* ***өзгеше емес,*** *ал анықтауышы нөлге тең квадрат матрица* ***нұқсанды*** *немесе* ***өзгеше*** *деп аталады.*

Назарыңызға! "Нұқсанды" немесе "нұқсанды емес" түсініктері тек квадрат матрицалар үшін ғана қолданылады;

Ескерту! $\det A \cdot \det A^{-1} = \det A \cdot A^{-1} = \det E = 1$ теңдігінен нұқсанды матрица үшін кері матрица болмайтыны шығады ($0 \cdot \det A^{-1} \neq 1$).

Анықтама. Берілген $A_{n\times n} = (a_{ij})$ квадрат матрицасының a_{ij} элементтерінің орындарына олардың A_{ij} алгебралық толықтауыштарын қойып жазып, шыққан матрицаны транспонирлеу арқылы алынған матрицаны ***қосалқы матрица*** деп атайды және оны A^* арқылы белгілейді:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Қосалқы матрицаның A_{ij} элементінің 1-ші индексі баған, ал 2-ші индексі жол нөмірін көрсетеді, яғни A_{ij} элементі i-ші баған мен j-ші жолдың қиылысуында тұр.

1- Мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ болса, онда $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,\quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2,\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1,$ олай болса, қосалқы матрица $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Нұсқау. 1-Мысалдағы A мен A^* матрицаларын салыстыра отырып, берілген екінші ретті матрицаның қосалқы матрицасын ((1) формуланы пайдаланып жатпастан) таба аласыз.

Кері матрица туралы

Теорема. Нұқсансыз матрицалардың, тек қана солардың кері матрицалары бар және кері матрица келесі формула арқылы табылады

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

▼ Жоғарыда біз *нұқсанды матрица үшін кері матрица болмайтынын* дәлелдегенбіз.

Матрица нұқсанды емес болсын: $\det A \neq 0$. Онда

$$C = A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^* \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} \ldots & A_{j1} \ldots & A_{n1} \\ A_{12} \ldots & A_{j2} \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} \ldots & A_{jn} \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ij}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Матрицаларды көбейту ережесі бойынша

$$c_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot (a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{jn})$$

(A_{jk} ***элементтері A^* қосалқы матрицаның j-ші бағанында орналасқан!***). Бұл теңдіктен, егер $i = j$ болса, онда

$$c_{ii} = \frac{1}{\det A} \cdot (a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}) = \frac{1}{\det A} \cdot \det A = 1,$$

ал егер $i \neq j$ болса, онда 2.1.п. 8° қасиет бойынша,

$$c_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot (a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{jn}) = 0, \quad i \neq j,$$

аламыз (***A_{jk} – берілген A матрицасының j-ші жол (i≠j) элементтерінің алгебралық толықтауыштары!***).

Сонымен, $C = A\cdot\left(\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$

Осы сияқты $\left(\dfrac{1}{\det A}A^*\right)\cdot A = E$ теңдігін де алуға болады. Олай болса, анықтама бойынша $\dfrac{1}{\det A}A^* = A^{-1}$. ▲

2-Мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасына кері матрицаны табу керек.

▼ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, олай болса берілген матрицаға кері матрица бар. A матрицасы үшін қосалқы матрица $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ тең болғандықтан (1-мысалды қараңыз) (2) формула бойынша $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\cdot A^* = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ аламыз.

Тексеру: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & +1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-2) + 2\cdot 1{,}5 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-0{,}5) \\ 3\cdot(-2) + 4\cdot 1{,}5 & 3\cdot 1 + 4\cdot(-0{,}5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$

$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 + 1\cdot 3 & -2\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ 1{,}5\cdot 1 + (-0{,}5)\cdot 3 & 1{,}5\cdot 2 + (-0{,}5)\cdot 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$Сонымен, $AA^{-1} = A^{-1}A = E.$ Демек: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$ ▲

Кері матрицаның келесі қасиеттері бар:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A; \qquad (A\cdot B)^{-1} = A^{-1}\cdot B^{-1}.$$

§ 1.4. Матрица рангі

Тікбұрышты матрицаның сандық сипатын қарастырайық. Матрица рангі **базистік жолдар (базистік бағандар**) деп аталатын жолдар (бағандар) санын анықтайды, ал қалған жолдар (бағандар) осы базистік жолдардың (базистік бағандардың) сызықты комбинациялары болады (§2.9. қараңыз).

Анықтама. *A матрицасының k-ші ретті миноры деп, A матрицасының кез келген k жолы мен кез келген k бағандарының қиылысуында тұрған элементтерден құралған анықтауышты айтады.*

Мысалы, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасының:

бір 3-ші ретті миноры (A матрицасының анықтауышы);

тоғыз 2-ші ретті миноры – $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23} \end{vmatrix}$, ..., $\begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix}$;

тоғыз 1-ші ретті миноры – $|a_{11}|$, $|a_{12}|$, ... , $|a_{33}|$ бар.

Назарыңызға! *Минордың к реті үшін к ≤ min{m,n} теңсіздігі орындалады (m – матрицаның жол, ал n – баған санын көрсетеді).*

Анықтама. *A матрицасының* ***рангі*** *деп, осы матрицаның нөлге тең емес минорларының* ***ең үлкен ретін*** *айтады және оны r(A) немесе r_A немесе rangA символдарының біреуімен белгілейді.*

Нөл матрицаның рангі нөлге тең деп есептеледі.

Егер A матрицасы:

нұқсансыз, n-ші ретті квадрат матрица болса, онда $r(A) = n$;

нұқсанды ($\det A=0$), нөл емес матрица болса, онда $1\le r(A)<n$.

Жалпы жағдайда, $m\times n$ өлшемді нөл емес A матрица үшін $r(A)\le\min\{m,n\}$ теңсіздігі орындалады. Матрица рангін табу үшін, оның 1-ші ретті нөлге тең емес минорынан бастап, барлық нөлге тең емес минорларын қарастырады.

Көмкеруші минорлар әдісі бұл процедураны едәуір жеңілдетеді. Осы әдісті түсіндірейік.

Кез келген 1-ші ретті нөлге тең емес минор (А матрицасының нөлге тең емес элементі) алынады, оны Δ_1 деп белгілейік. Енді Δ_1 -ді көмкеруші (ішінде Δ_1 болатын) барлық 2-ші ретті минорлар қарастырылады. Егер оның барлығы нөлге тең болса, онда $r(A)=1$, ал егер олай болмаса, яғни нөлге тең емес екінші ретті ең болмағанда бір минор бар болса, онда оны Δ_2 арқылы белгілейміз.

Келесі циклдер осы сияқты жалғасады. A матрицасының k-ші ретті нөлге тең емес миноры Δ_k, ал оны көмкеретін барлық минорлар нұқсанды болса, онда $r(A)=k$, ал егер олай болмаса, Δ_{k+1} нөлге тең емес минорын алып, процесс одан әрі жалғасады.

1-Мысал. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының рангін табу керек.

▼ $\Delta_1=|a_{11}|=1\neq 0$. Оны көмкеруші 2-ші ретті минорлар ішінде нөлге тең емес минор $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. Δ_2-ні көмкеруші 3-ші ретті жалғыз минор, A матрицасының анықтауышы.

Бірақ $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$ болғандықтан, $r(A)=2$. ▲

Матрица рангін табудың – **элементар түрлендірулер әдісі (**оны **Гаусс әдісі** деп те атайды**).**

A матрицасына жасалатын **элементар түрлендірулер**:

1. Параллель қатарларды өзара орнын алмастыру.
2. Қатарды нөл емес санға көбейту.
3. Қатарға оған параллель қатарды қандай да бір k санына көбейтіп қосу.
4. Нөл қатарды алып тастау.

Матрицаға жасалған элементар түрлендірулер оның рангін өзгертпейді.

B матрицасы *A* матрицасынан элементар түрлендірулер арқылы алынса, оларды **эквивалент** матрицалар деп атайды да $A \sim B$ арқылы белгілейді.

A матрицасының рангін табу үшін, оны рангісін оңай табуға болатын, оған эквивалентті *B* матрицасына ауыстырады: $A \sim B$. Мұндай матрицаларға, мысалы, **трапеция тәріздес матрицалар** жатады:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}, \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Бұл матрицаның рангі жолдар санына тең: r(A)=r(B)=r, өйткені мұнда *нөлге тең емес r-ші ретті минор*лардың бірін сол жақ бұрыштағы $r \times r$ өлшемді матрицадан алуға болады:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

2-Мысал. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасының рангін табу керек.

▼ 1-ші және 2-ші бағандарды өзара орнын алмастырып, содан соң 1-ші жолды -4 және -5 сандарына көбейтіп, сәйкес 2-ші және 3-ші жолдарға қосамыз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim$$ /2-ші жолды (-1)-ге көбейтіп, 3-ші

жолға қосамыз/ $\sim A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Бұл трапеция тәріздес матрица ((1) қараңыз) және $r=2$. Олай болса $r(A)=2$. ▲

Анықтама. *Реті А матрицасының рангісіне тең нөл емес минор осы матрицаның* ***базистік миноры*** *деп аталады.*

Базистік минордың жолдарына (бағандарына) сәйкес орналасқан A матрицасының жолдары (бағандары) оның **базистік жолдары (базистік бағандары)** деп аталады.

3-Мысал. 2-мысалдағы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасында $r(A)=2$ және $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ – екінші ретті минор нөлге тең емес болғандықтан, ол-базистік минор. Олай болса, A матрицасының 1-ші және 2-ші жолдары және 1-ші және 2-ші бағандары базистік қатарлар болады.

Тақырыпқа арналған сұрақтар мен тапсырмалар

1. Матрица деген не? Матрицаларға қолданылатын амалдар қалай анықталады және олардың қандай қасиеттері бар?
2. Кері матрица деген не? Кері матрицаның бар болу шарты қандай және кері матрицаны қандай формула арқылы табуға болады? Мысал келтіріңіз.
3. Матрица рангі деген не және оны қандай әдістер арқылы табуға болады? Мысалдар келтіріңіз.

Тақырыпқа арналған есептер:

№1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ матрицаларының **а)** AB; **ә)** BA көбейтінділерін табу керек.

(Жауабы: а) AB $=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$; **ә)** BA – көбейтуге болмайды.)

№2. Матрицаның рангін табу керек:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **(Ж :** 2); **ә)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **(Ж :** 2);

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. **(Ж : 3**); **в)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. **(Ж : 3**);

г) $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 13 & 8 & 0 \\ -6 & -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. **(Ж : 4**); **ғ)** $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 13 & 8 & 0 \\ -6 & -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. **(Ж : 4**);

1.1-ҮТ

№2. ***А және В матрицалары берілген.***

Табу керек: а) AB; ***б)*** BA; ***в)*** A^{-1}; ***г)*** AA^{-1}; ***д)*** $A^{-1}A$.

2.1. A=$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$**,** **B=**$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$**.**

2.2. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

2.3. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

2.4. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.5. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

2.6. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2.7. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

2.8. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

2.9. $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2.10. $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

2.11. $A=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2.12. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

2.13. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

2.14. $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

2.15. $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

2.16. $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

2.17. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

2.18. $A=\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2.19. $A=\begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

2.20. $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2.21. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

2.22. $A=\begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.23. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.24. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

2.25. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

2.26. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.27. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2.28. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.29. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.30. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

№3. ***Берілген А және В матрицаларының рангтерін табу керек.***

3.1. **A=** $\begin{bmatrix} 5 & -3 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & -6 & -1 \\ -3 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. **B=** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3.2. **A=** $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **B=** $\begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

3.3. **A=** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. **B=** $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

3.4 **A=** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 & -10 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$. **B=** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

3.5. **A=** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. **B=** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

3.6. **A=** $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. **B=** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

3.7. $A=\begin{bmatrix} 10 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

3.8. $A=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 & -1 \\ -5 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

3.9. $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ -4 & 9 & 4 & 5 \\ -2 & 23 & 10 & 13 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

3.10. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

3.11. $A=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

3.12. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

3.13. $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

3.14. **A=**$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. **B=**$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

3.15. **A=**$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & 0 & 6 & -6 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **B=**$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

3.16. **A=**$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & -7 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$. **B=**$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

3.17. **A=**$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 & -8 \\ -2 & -1 & -9 & 8 \\ 2 & 2 & -7 & 9 \end{bmatrix}$. . **B=**$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

3.18. **A=**$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & -1 & -4 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **B=**$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.19. **A=**$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & -8 & 3 & -11 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$. **B=**$\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

3.20. **A=**$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. **B=**$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.21. $A=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & -9 & 3 & -12 \\ 2 & -7 & -1 & -6 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

3.22. $A=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3.23. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

3.24. $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & 0 & -5 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

3.25. $A=\begin{bmatrix} 4 & -7 & 7 & -14 \\ 1 & -2 & 4 & -6 \\ 3 & -5 & 3 & -8 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

3.26. $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3.27. $A=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.28. A= $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. B= $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3.29. A= $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. B= $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

3.30. A= $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -7 \\ 2 & -4 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. B= $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1.1-ҮТ №2 және №3 есептерін орындау үлгісі

№2. *A* және *B* матрицалары берілген:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Табу керек: **а)** AB; **б)** BA; **в)** A^{-1}; **г)** AA^{-1}; **д)** $A^{-1}A$.

▼ **а)** *A* матрицасының бағандар саны мен *B* матрицасының жолдар саны тең болғандықтан *A* мен *B* матрицаларын көбейтуге болады (§1.2 ескерту). $C = AB$ матрицасының элементтерін $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ формуласы бойынша табамыз:

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} -4 & +0 & -2 & -8 & +0 & +1 & 12 & +0 & +3 \\ 2 & -2 & -6 & 4 & +0 & +3 & -6 & -1 & +9 \\ 3 & +4 & -4 & 6 & +0 & +2 & -9 & +2 & +6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

б) B матрицасының бағандар саны мен A матрицасының жолдар саны тең болғандықтан B мен A матрицаларын көбейтуге болады (§1.2 ескерту). **а)**-да көрсетілген тәсілмен $C=BA$ матрицасын табамыз:

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -4 & +4 & -9 & 0 & -2 & -6 & 1 & +6 & -6 \\ -8 & +0 & +3 & 0 & +0 & +2 & 2 & +0 & +2 \\ 8 & +2 & +9 & 0 & -1 & +6 & -2 & +3 & +6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

а) мен б)-да шыққан нәтижелерден $AB \neq BA$ болатынын көреміз;

в) A матрицасының анықтауышын табайық:

$$\det A=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0.$$ A матрицасы нұқсансыз, олай болса A^{-1} кері матрицасы бар (§1.3-ғы теорема). Кері A^{-1} матрицаны §1.3-ғы (2) формула бойынша есептейміз:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$ Мұндағы алгебралық толықтауыштарды есептейміз

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Сонымен,

$$A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix}.$$

г) Матрицаларды көбейту ережесін қолданамыз:

$$AA^{-1} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E;$$

д) Матрицаларды көбейту ережесін қолданамыз:

$$A^{-1}A = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Соңғы г) мен д) пункттерінен $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ теңдіктерінің орындалғанын көреміз, демек кері матрица дұрыс табылған. ▲

№3. Берілген А және В матрицаларының рангтерін табу керек:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

▼ *Көмкеруші минорлар әдісі.* A матрицада екінші ретті нөл емес минор, мысалы, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ бар болғандықтан, матрица рангі екіден кіші емес. Бұл минорды көмкеруші үшінші ретті минорларды есептейік:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4-4-4+12=0. \ ,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0+4+2-0+6-12=0.$$

Анықтама бойынша, $r(A)=2.$

Элементар түрлендірулер әдісі. Берілген матрицаны оған эквивалентті, трапеция тәріздес матрицаға келтірейік. Ол үшін А матрицаға элементар түрлендірулер қолданамыз

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \end{bmatrix}.$$

Мұнда, бірінші матрицаның үшінші жолын минус бірге көбейтіп оны бірінші жолмен алмастырдық. Екінші матрицаның бірінші жолын минус екі мен минус үшке көбейтіп сәйкес екінші және үшінші жолдарға қостық. Үшінші матрицаның екінші жолын минус бірге көбейтіп үшінші жолға қостық. Трапеция тәріздес матрицаның нөл емес жолдарының саны (екі) бастапқы А матрицасының рангін көрсетеді: $r(A)=2.$

B матрицаның нөл емес екінші ретті $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ минорын көмкеруші үшінші ретті минор осы матрицаның анықтауышы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -3+0+28-18-0+14 = 21 \neq 0.$$

Анықтама бойынша, $r(B)=3.$ ▲

§ 1.5. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін матрицалық әдіс арқылы және Крамер* ережесі арқылы шешу

n белгісізі бар m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі келесі түрде жазылатын еді (1.1.1 п.):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Мұндағы:

$x_1, x_2, ..., x_n$ – айнымал шамалар (белгісіздер);

a_{ij}, $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$ – **жүйе коэффициенттері;**

ал b_i, $i=1,2,...,m$ – **бос мүшелер** деп аталатын еді.

Жүйедегі кез келген теңдеуді қанағаттандыратын x_1, x_2, …, x_n айнымалдардың мәндерінің реттелген жиынтығы **жүйенің шешімі** деп аталады.

Шешімі бар жүйе – **үйлесімді,** ал шешімі жоқ жүйе – **үйлесімсіз** деп аталады.

* Крамер Габриель (1704-1752) – Швейцария математигі

(1) жүйедегі белгісіздердің коэффициенттерінен құралған $m \times n$ өлшемді матрицаны (**жүйе матрицасын**) A арқылы, бос мүшелер бағанын B арқылы, белгісіздер бағанын X арқылы белгілейік:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Енді (1) жүйені **матрицалық түрде** жазуға болады (тексеріңіз):

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

немесе қысқаша

$$AX = B. \tag{2}$$

Алдымен (1) жүйенің шешу әдістерін $m = n$ үшін, яғни теңдеулер мен белгісіздер саны өзара тең болған жағдайда қарастырамыз (бұл жағдайда, A – квадрат матрица болады).

Теорема. Егер сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің матрицасы нұқсансыз ($\Delta = \det A \neq 0$) болса, онда оның ***жалғыз шешімі бар*** және оны

$$X = A^{-1}B \tag{3}$$

формуласы арқылы табуға болады.

▼ (2) теңдіктің екі жағын сол жақтарынан кері A^{-1}-матрицаға көбейтеміз (A^{-1} бар, өйткені $\det A \neq 0$) $A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad EX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B.$ Табылған матрицаны (2) теңдеулер жүйесіне қойып тексерейік: $AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = EB = B,$ демек $A^{-1}B$ - (2) теңдеулер жүйесінің шешімі. Жүйенің шешімі жалғыз болатынына төменде көз жеткіземіз (**§ 1.6.** ереже). ▲

Сызықтық теңдеулер жүйесін (3) формула арқылы шешу процесі – **матрицалық әдіс** деп аталады.

1-мысал. $\begin{cases} x+2y=5, \\ 3x+4y=11 \end{cases}$ жүйесін матрицалық әдіспен шешейік.

▼ Жүйенің матрицасының детерминанты $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Енді A^{-1} табайық (1.3.п.5–мысал) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^* = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

1-мысалда $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, сондықтан (3) формула бойынша,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv X = A^{-1}B = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4\cdot 5+(-2)\cdot 11 \\ -3\cdot 5+1\cdot(-11) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$ олай болса, $x=1, y=2$. Жауабы: $(1;2)$. ▲

Анықтама бойынша, (3) теңдіктегі матрицалардың сәйкес элементтерін теңестіре отырып, жүйені шешудің **Крамер ережесі** деп аталатын әдісін көрсететін тұжырым алуға болады (ол - жоғарыдағы теоремаға балама тұжырым).

Крамер ережесі. Егер сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің матрицасы нұқсансыз ($\Delta = \det A \neq 0$) болса, онда оның ***жалғыз шешімі бар*** және оны

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

теңдіктері арқылы табуға болады. Мұнда Δ_j арқылы Δ анықтауышының j-ші ***бағанын*** бос мүшелер бағанымен ауыстырып алынған анықтауыш белгіленген:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots\quad\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

▼ $X = A^{-1}B$ формуласын ашып жазайық:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\cdot A^* \cdot B = \frac{1}{\Delta}\cdot \begin{pmatrix} A_{11}A_{21}\dots A_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{1j}A_{2j}\dots A_{nj} \\ \dots\dots\dots \\ A_{1n}A_{2n}\dots A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \dots + A_{nj}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Енді матрицалардың теңдігінің анықтамасын пайдаланамыз:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n\right) = \frac{1}{\Delta}\Delta_1,$$

……………………………………………………

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \dots + A_{nj}b_n\right) = \frac{1}{\Delta}\Delta_j,$$

……………………………………………

$$x_n = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n\right) = \frac{1}{\Delta}\Delta_n$$

(теңдіктердің оң жағындағы қосынды Δ_j анықтауыштың j-ші баған элементтері бойынша жіктелуі:

$$b_1\cdot A_{1j} + b_2\cdot A_{2j} + \dots + b_n A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\dots a_{1n} \\ a_{21}\dots a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1}\dots a_{2n} \\ \dots\quad\dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\dots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_j,\ \ j = 1,2,\dots,n).$$

▲

2-мысал. $\begin{cases} x+2y=5, \\ 3x+4y=11 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін Крамер ережесін қолданып шешу керек.

▼ Қажетті анықтауыштарды есептеп алып, (4) теңдіктерді $n=2$ үшін қолданамыз: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 2\cdot 11 = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 1\cdot 11 - 5\cdot 3 = -4,$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2.$$ ▲

§ 1.6. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің үйлесімді болу шарттары. Гаусс әдісі

Матрицалық әдіс пен Крамер ережесін, $n = m$ және теңдеулер жүйесінің негізгі матрицасы нұқсансыз болса ғана қолдануға болады. Бұл екі шарт орындалған жағдайда да, аталған әдістер күрделі есептеулерге әкелуі мүмкін. Өйткені, ол әдістер n^2 есеге жуық есептеу амалдарын жасауды қажет етеді., Ал егер $n > 10$ болса, онда бұл әдістерді қолдану мүмкіндігі тіпті азайады. Төменде көрсетілетін **Гаусс әдісі** (элементар түрлендіру әдісі), n белгісізі бар m теңдеулер жүйесін ***зерттеуге*** және ***шешімін табуға*** мүмкіндік береді (жүйенің шешімдер саны ақырсыз болатын жағдайда да). Теңдеулер жүйесін зерттеу – оның үйлесімді (немесе үйлесімсіз) екенін, ал егер үйлесімді болса, онда жүйе шешімінің қанша болатынын анықтау деген сөз.

Келесі n белгісізі бар m теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Анықтама. Сызықтық теңдеулер жүйесінің ***кеңейтілген матрицасы*** *деп жүйенің А матрицасының оң жағынан бос мүшелер бағанын тіркеп жазу арқылы алынған келесі* $\overline{A}$*-матрицаны айтады*

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{c|c} a_{11}\ a_{12}...a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2n} & b_2 \\ \dots\ \dots\ \dots & \dots \\ a_{m1}\ a_{m2}...a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

(тіркелген бос мүшелер тік сызықпен ажыратылып қойылады).

(1) жүйенің матрицасы $A_{m\times n}$ өлшемді болғандықтан, кеңейтілген матрицасаның өлшемі $\overline{A}_{m\times(n+1)}$ болатыны түсінікті.

(1) жүйенің матрицасы мен кеңейтілген матрицаның рангтері үшін екі жағдай: $r(\overline{A})=r(A)$ немесе $r(\overline{A})>r\left(A\right)$ болуы мүмкін.

Теорема (Кронекер-Капелли). *Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің матрицасы мен кеңейтілген матрицасының рангтері тең болса:* $r(\overline{A})=r(A),$ *тек сонда ғана жүйе үйлесімді болады.*

(Л.Кронекер – неміс, А.Капелли – Италия математиктері. Бұл теореманы олар бір-біріне тәуелсіз алған).

Теңдеулер жүйесін Гаусс схемасы бойынша зерттеу және шешу сұрақтарын мысалдар арқылы түсіндіреміз. Бірақ оқушыға келесі ережелерді еске ұстауды ескертеміз.

А және $\overline{A}$ *матрицаларының рангтерін Гаусс әдісімен анықтаған жөн. Ол үшін элементар түрлендірулерді қолдана отырып* $\overline{A}$ *кеңейтілген матрицаны трапеция тәріздес матрицаға келтіреді. Мұнда ескеретін жағдай,* 2-4 *элементар түрлендірулерін тек* ***жолдар үшін қолданады (алынған теңдеулер жүйесі бастапқы теңдеулер жүйесімен пара пар болуы үшін)!*** *Элементар түрлендірулер барысында бағандар орны өзгерген болса, осы бағандар үстінен өз белгісіздерін жазып, белгілеп отырады.*

Сонымен, r(A) және $r(\overline{A})$ *рангтері табылды делік* (трапеция тәріздес матрица рангін табу туралы жоғарыда қарастырғанбыз (§1.4, 2-мысалды қараңыз)). ***Келесі жағдайлар болуы мүмкін:***

1) $r(\bar{A}) = r(A) = r$. *Бұл жағдайда Кронекер-Капелли теоремасы бойынша теңдеулер жүйесі үйлесімді,сонымен бірге*

а) $r = n$ *(матрицалардың рангтері белгісіздер санына тең) болса, жүйе шешімі жалғыз болады;*

б) $r < n$ *болса, теңдеулер жүйесінің шешімдерінің саны ақырсыз және ол шешімдер* $(c_1, c_2, ..., c_{n-r})$ *параметрлеріне тәуелді (мұндағы* $c_1, c_2, ..., c_{n-r} \in R$ *).*

2) $r(\bar{A}) > r(A)$. *Бұл жағдайда Кронекер-Капелли теоремасы бойынша теңдеулер жүйесі үйлесімсіз.*

Назар аударыңыз! Егер жүйе матрицасының анықтауышы нөл емес болса: $\det A \neq 0$ (теңдеулер саны белгісіздер санына тең: $m = n$ жағдайда), онда **1)** ***а)*** ережесі бойынша, жүйенің жалғыз шешімі бар (§1.5 теореманы қараңыз). Ал егер $m = n$, $\det A = 0$ болса, онда жүйе үйлесімсіз немесе оның шешімдері ақырсыз болады.

1-мысал. Теңдеулер жүйесін зерттеу керек:

$$\begin{cases} y + 2z = 3, \\ x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 7. \end{cases}$$

▼ Кеңейтілген матрицаны жазып алып, жоғарыдағы талаптарды сақтай отырып оны трапеция тәріздес матрицаға келтіреміз.

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} y & x & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

/ 1-ші жолды (–1)-ге және (–2)-ге көбейтіп, сәйкес 2-ші және 3-ші жолдарға қосамыз / $\sim$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} y & x & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

/ 2-ші жолды (–1)-ге көбейтіп, 3-ші жолға қосамыз/ $\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$. Бұл соңғы матрицадан $r(A)=2,\ \ r(\bar{A})=3$ екенін көреміз: $r(A)\neq r(\bar{A})$. Олай болса берілген жүйе үйлесімсіз. ▲

2-мысал. Теңдеулер жүйесін зерттеп, үйлесімді болған жағдайда оның шешімін табу керек:

$$\begin{cases} y+2z=3, \\ x+y+z=3, \\ x+2y+4z=7. \end{cases}$$

▼ $$\bar{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Мұнда $r(A)=r(\bar{A})=3$. Бұл – **1)**, ***а)*** жағдайға сәйкес болғандықтан, *теңдеулер жүйесінің **жалғыз шешімі бар.** Оны табу үшін алынған матрицаға сәйкес теңдеулер жүйесін жазып, белгісіздерді табуды соңғы теңдеуден бастаймыз. Табылған белгісіздерді алдыңғы теңдеулерге қоя отырып (бұл процесс, Гаусс әдісінің **кері жүру жолы** деп аталады) жүйе шешімін табамыз:*

$$\begin{cases} y+2z=3, \\ x-z=0, \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2=3, \\ x-1=0, \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$$ Жауабы: (1,1,1). ▲

Назарыңызға! 2-мысалдағы теңдеулер жүйесін шешуге кері матрица әдісін немесе Крамер ережесін қолдануға болады!

3-мысал. Теңдеулер жүйесін зерттеп, оны шешу керек:

$$\begin{cases} y+2z=3, \\ x+y+z=3, \\ x+2y+3z=6. \end{cases}$$

$$\blacktriangledown \quad \overline{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Мұнда $r(A)=r(\overline{A})=2<3=n$. Бұл – **1)** ***б)*** жағдайына сәйкес болғандықтан, жүйенің шешімдері ақырсыз және ол шешімдер $3-2=1$ параметрге тәуелді. Алынған матрицаға қарап бірнеше базистік минор табылатынын көреміз: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. Олардың біреуін, мысалы $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ алып, бұл минорға сәйкес y пен x белгісіздерін **базистік белгісіздер** деп атаймыз, ал $z=C$ **еркін айнымал** деп аталады, өйткені ол кез келген мәнге ие бола алады: $z=C\in(-\infty,+\infty)$ (мұнда басқа базистік белгісіздерді де алуға болады). Соңғы матрица бойынша теңдеулер жүйесін құрып, алынған жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} y+2z=3, \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=C, \\ y+2C=3, \\ x-C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=C, \\ y=3-2C, \\ z=C. \end{cases}$$

Жауабы: $(C,\ 3\text{-}2C,\ C)$, $\quad C\in(-\infty,+\infty)$. $\blacktriangle$

§ 1.7. Біртекті және біртекті емес сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі

Анықтама. *Бос мүшелері нөлге тең жүйені* ***біртекті,*** *ал бос мүшелерінің ең болмағанда біреуі нөл емес жүйені* ***біртекті емес*** *деп атайды.*

Біртекті жүйені келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

оның матрицалық түрі $AX = 0$, $(0 -$ нөл баған).

Біртекті жүйе – үйлесімді, өйткені $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ ...,\ x_n = 0$ – жүйенің шешімі! Бұл ***тривиал шешім*** деп аталады.

Матрицалық әдісті немесе Крамер ережесін берілген біртекті жүйені шешуге бірден қолданудың реті жоқ. Өйткені егер $m = n,$ $\det A \neq 0$ болса, онда $A \sim \overline{A}$ болғандықтан, $r(A) = r(\overline{A}) = n$ болады да, алдыңғы тақырыптағы **1)**, ***а)*** жағдайға сәйкес жүйенің жалғыз шешімі бар, ол $(0, 0, ..., 0) -$ тривиал шешім; ал егер $\det A = 0$ болса, онда бұл әдістерді тікелей қолдана алмаймыз. Сондықтан біртекті жүйелерді шешуде Гаусс схемасын ұстанған жөн.

1-мысал. Біртекті теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + 3y + 4z = 0. \end{cases}$$

▼ A матрицасының жол элементтерін түрлендіреміз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Мұндағы $r(A) = 3$ саны

белгісіздер санына тең болғандықтан, жүйенің жалғыз шешімі бар, ол, әрине, тривиал шешім: $(0,0,0)$. ▲

2-мысал. Біртекті теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x+2y+2z=0, \\ 2x+3y+3z=0. \end{cases}$$

▼ Жүйені парапар жүйемен алмастыру үшін түрлендірулерді тек жол элементтеріне қолданамыз $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Бұдан $r(A)=2<3$ екенін көреміз, сондықтан теңдеулер жүйесінің шешімдер саны ақырсыз және олар бір параметрге тәуелді. Мұнда, мысалы, x пен y базистік айнымалдар бола алады, өйткені $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$ Жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ \quad y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=C, \\ x+y+C=0, \\ \quad y+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=-C, \\ z=C. \end{cases}$$

Жауабы: (0, -C, C), $\quad C\in(-\infty,+\infty)$, $\quad C-$ кез келген сан.

Назарыңызға! Егер $r(A)=2<3$ екені белгілі болса, онда берілген теңдеулер жүйесіне, коэффициенттері базистік жолдар құрайтын оның кез келген екі теңдеуінің жүйесі пара пар. ▲

Тақырыпқа арналған сұрақтар мен тапсырмалар

1. n белгісізі бар m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің жалпы түрін жазыңыз. Осы жүйе матрицалық түрде қалай жазылады?

2. Қандай шарт орындалғанда, сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге матрицалық әдісті қолдануға болады? Осы матрицалық әдіс қандай формула арқылы жүзеге асырылады? Мысал келтіріңіз.

3. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге арналған Крамер формулаларын жазыңыз және оларды матрицалық әдіске қолданатын формула арқылы дәлелдеңіз. Мысал келтіріңіз.

4. Сызықтық алгебралық теңдеулер ***жүйесінің матрицасы*** мен ***кеңейтілген матрицасы*** деген не және олардың рангтерінің арасында қандай қатыстар болуы мүмкін?

5. Кронекер-Капелли теоремасын пайдаланып, сызықтық алгебра-лық теңдеулер жүйесінің матрицасы мен кеңейтілген матрица-сының рангтері арқылы жүйені үйлесімділікке зерттеңіз.

6. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін үйлесімділікке зерт-теудің және оны шешудің Гаусс әдісін түсіндіріңіз. Мысалдар келтіріңіз.

7. Матрицалық әдіспен немесе Крамер ережесімен салыстыр-ғандаГаусс әдісінің қандай артықшылықтары бар?

8. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің базистік белгісіздері мен еркін айнымалдарын қалай таңдауға болады?

9. Неліктен біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі – үйлесімді?

10. Біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге матрицалық әдісті немесе Крамер ережесін тікелей қолданбау себебі неде?

11. Қандай шарт орындалғанда, біртекті n белгісізі бар n сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің тривиал емес шешімдері болады?

1.2–ҮТ

1. Сызықтық біртекті емес алгебралық теңдеулер жүйесі берілген. Берілген жүйені:

а) Крамер ережесі бойынша;

б) Кері матрица көмегімен (матрицалық әдіспен);

в) Гаусс әдісімен

шешу керек.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

1.4 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = -8. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ **1.26.** $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$ **1.28.** $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$ **1.30.** $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

2. Сызықтық біртекті емес алгебралық теңдеулер жүйесі берілген. Берілген жүйені үйлесімділікке зерттеу керек. Егер ол үйлесімді болса, онда оны 1-мысалда аталған үш тәсілмен шешу керек.

2.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$ **2.4.** $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$ **2.6.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ **2.8.** $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$

3. Біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешіңіз

3.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4. Біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешіңіз

4.1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.11 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

4.26. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4.30. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

1.2–ҮТ орындау үлгісі

№1. Берілген сызықтық біртекті емес алгебралық теңдеулер жүйесін $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$

а) Крамер ережесі бойынша;

б) Кері матрица көмегімен (матрицалық әдіспен);

в) Гаусс әдісімен шешу керек.

► Кронекер–Капелли теоремасын жүйенің үйлесімділігін зерттеуге қолдану үшін элементар түрлендірулер арқылы берілген $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ матрицасы мен кеңейтілген $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right]$ матрицасының рангтерін табамыз. Ол үшін $\overline{A}$ матрицасының бірінші жолын -2-ге көбейтіп екінші жолға қосамыз, содан соң бірінші жолды -3-ке көбейтіп үшінші жолға қосамыз да, екінші және үшінші бағандардың орындарын өзара алмастырамыз:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{array}\right].$$

Алынған трапеция тәріздес матрицалардан $r_A = r_{\overline{A}} = 3$ (белгісіздер санына тең) екенін көреміз. Олай болса Кронекер-Капелли теоремасы бойынша жүйе үйлесімді, оның жалғыз шешімі бар.

а) Крамер ережесі бойынша (§ 1.5. (4)-формула): $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. Мұндағы анықтауыштарды есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32.$$

Олай болса, $x_1 = \dfrac{64}{-16} = -4, \quad x_2 = \dfrac{-16}{-16} = 1, \; x_3 = \dfrac{32}{-16} = -2.$

Жауабы: (–4; 1; –2). *Назарыңызға:* §1.5, 2-мысалды қараңыз.

б) Жүйенің матрицалық түрдегі шешімін $X = A^{-1}B$ теңдігін пайдаланып табамыз. A^{-1} - кері матрицаны §1.3, (2)-формула бойынша табамыз (кері матрица бар, өйткені $\Delta = \det A = -16 \neq 0$):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}.$$

Жүйенің шешімі:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -45+32+77 \\ -9-7 \\ -42+32+42 \end{bmatrix} =$$

$$=\frac{1}{-16}\begin{bmatrix}64\\-16\\32\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\1\\-2\end{bmatrix}. \quad x_1=-4, \quad x_2=1, \quad x_3=-2.$$

Жауабы: (–4; 1; –2) *Назарыңызға!* §1.5, 1-мысалды қараңыз.

в) Жүйені Гаусс әдісімен шешейік. Ол үшін кеңейтілген $\overline{A}$ матрицасын элементар түрлендірулер арқылы трапеция тәріздес матрицаға келтіреміз. Бұл амалдар жоғарыда орындалған. Біз мұнда тек бағандарының үстіне сәйкес белгісіздерді көрсетіп жазамыз:

$$\overline{A}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1 & x_3 & x_2\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 3\\0 & -1 & -6 & -4\\0 & 0 & -16 & -16\end{array}\right]\end{array}.$$

Алынған трапеция тәріздес матрицадан $r(A)=r(\overline{A})=3,$ яғни жүйенің жалғыз шешімі бар екенін көреміз (§1.6 қараңыз). Енді Гаусс әдісіндегі кері жүру жолын орындаймыз:

$$\begin{cases}x_1-x_3+5x_2=3,\\ \quad -x_3-6x_2=-4,\\ \quad\quad -16x_2=-16,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1-x_3+5\cdot1=3,\\ \quad -x_3-6\cdot1=-4,\\ \quad\quad\quad x_2=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1-(-2)=-2,\\ \quad\quad x_3=-2,\\ \quad\quad\quad x_2=1.\end{cases}$$

Жауабы: (–4; 1; –2)

Назарыңызға! §1.6, 1 және 2-мысалдарды қараңыз.

№2. Берілген сызықтық біртекті емес алгебралық теңдеулер жүйесін үйлесімділікке зерттеу керек. Егер ол үйлесімді болса, онда оны №1-есепте аталған үш тәсілмен шешу керек:

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=2,\\3x_1+x_2-3x_3=1,\\5x_1-2x_2-2x_3=4.\end{cases}$$

► Кронекер-Капелли теоремасын жүйенің үйлесімділігін зерттеуге қолдану үшін элементар түрлендірулер арқылы берілген матрицаны трапеция тәріздес матрицаларға келтіреміз. Ол үшін

1) кеңейтілген $\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right]$ матрицасының үшінші және бірінші бағандарының орындарын өзара алмастырамыз;

2) бірінші жолын 3-ке көбейтіп екінші жолға қосамыз;

3) бірінші жолын 2-ге көбейтіп үшінші жолға қосамыз;

4) екінші жолдан үшінші жолды шегереміз:

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$ Алынған трапеция тәріздес матрицалардан $r_A=2,\ r_{\bar{A}}=3$ көреміз, яғни $r_A\neq r_{\bar{A}}$. Кронекер–Капелли теоремасы бойынша, берілген жүйе үйлесімді емес. ◄

Назарыңызға! §1.6, 1 және 2-мысалдарды қараңыз.

№3. Біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3=0. \end{aligned}\right\}$$

► Жүйенің анықтауышы $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=11\neq 0$ нөлге тең емес болғандықтан, оның жалғыз тривиал шешімі бар: $x_1=x_2=x_3=0$, (§1.7, 1-мысалды қараңыз). ◄

№4. Біртекті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу керек:

$$\left.\begin{aligned}3x_1+4x_2-x_3=0,\\ x_1-3x_2+5x_3=0,\\ 4x_1+x_2+4x_3=0.\end{aligned}\right\}$$

► Гаусс әдісін қолданамыз:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & -3 & 5\\ 4 & 1 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 3 & 4 & -1\\ 4 & 1 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 13 & -16\\ 0 & 13 & -16\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 13 & -16\end{bmatrix}.$$

Мұнда $r_A=2,\quad n=3$ болғандықтан, жүйенің $3-2=1$ параметрге тәуелді ақырсыз шешімдер жиыны бар. Базистік екі белгісіз ретінде x_1 мен x_2 алуға болады, өйткені олардың коэффициенттерінен құралған екінші ретті минор нөлге тең емес: $\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 13\end{vmatrix}=13\neq 0$ (әрине, базистік белгісіз ретінде, коэффициенттерінен құралған екінші ретті миноры нөлге тең емес басқа кез келген екі белгісізді алуға болар еді). Бұл жағдайда x_3 – еркін айнымал болады: $x_3=C,\ \ C\in(-\infty,\ +\infty)$. Енді Гаусс әдісіндегі кері жүру жолды орындайық:

$$\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3=0,\\ \qquad 13x_2-16x_3=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1-3x_2+5C=0,\\ \qquad 13x_2-16C=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x_1-3\cdot\dfrac{16C}{13}+5C=0,\\ \qquad x_2=\dfrac{16C}{13},\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{17C}{13}, \\ x_2 = \dfrac{16C}{13}, \\ x_3 = C, \qquad C \in (-\infty, \ +\infty). \end{cases}$$

Жауабы: $\left(\dfrac{-17C}{13}, \ \dfrac{16\,C}{13}, \ C, \right) \quad C \in (-\infty, +\infty).$

Ескерту: Жауапты ықшам жазу үшін $C = 13k, \ k \in (-\infty, \ +\infty)$ айнымал ауыстыруын жасауға болады. Онда, берілген теңдеулер жүйесінің шешімі келесі түрде жазылаы: (-17k; 16k; 13k), $k \in (-\infty; \ +\infty)$. ◄

Назарыңызға! §1.7, 2-мысалды қараңыз.

2. АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§ 2.1. Тікбұрышты декарттық координаттар жүйесі

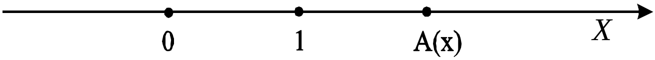
Аналитикалық геометрия көптеген геометриялық есептерді сызу жұмыстарынсыз-ақ алгебралық әдістермен шығаруға мүмкіндік береді. Оның негізі – координаттар жүйесі. Координаттар жүйесі – нүкте орнын сандар жиынтығымен, ал сызықтар мен беттерді теңдеулер көмегімен анықтауға мүмкіндік береді.

Анықтама. *Егер X* ***түзуінің бағыты****, O нүктесі (****санау басы****) және* ***бірлік кесінді*** *(масштаб) көрсетілсе, онда оны OX* ***координат өсі*** *(немесе* ***сандар өсі****) деп атайды. O нүктесі* ***координат басы*** *деп аталады.*

Түзудегі әрбір A нүктесіне x саны – оның координаты сәйкестендіріледі де, оны $A(x)$ деп белгілейді (1-суретті қараңыз).

Түзудің нүктелер жиыны мен нақты сандар жиынының арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатуға болатыны белгілі.

Түзуден 0 мен 1 нүктелерін және түзу бағытын кез келген етіп таңдауға болатындықтан, берілген түзуде саны ақырсыз координаттар өсін алуға болады.

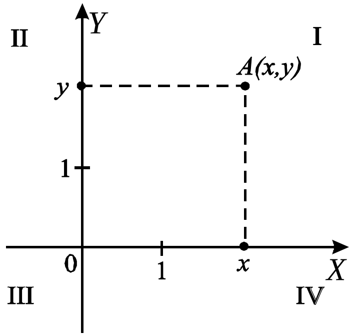


1-сурет

Анықтама. *Жазықтықтағы* ***OXY тікбұрышты декарттық координаттар жүйесі*** *деп, координат бастары ортақ, бірлік кесінділері тең, өзара перпендикуляр орналасқан координат өстерінің OX,OY – жұбын айтады.* Бұл өстердің біріншісін **абсцисса өсі** (OX), ал екіншісін **ордината өсі** (OY) деп атайды.

Бір жазықтықта жатқан A нүктесі мен L түзуі берілсін. A нүктесінің L **түзуіне проекциясы** деп, A нүктесі арқылы өтетін, L түзуіне перпендикуляр түзу мен осы L түзуінің A' қиылысу нүктесін айтады.

Жазықтықтағы A нүктесінің координат өстеріндегі проекцияларының координаттары A **нүктесінің *OXY* тікбұрышты декарттық координаттар жүйесіндегі координаттары** деп аталады да, $A(x;\ y)$ арқылы белгіленеді (2-сурет). Мұндағы x – нүктенің абсциссасы, ал y – оның ординатасы деп аталады.



2-сурет

Жазықтықтағы нүктелер жиыны мен барлық $(x;\ y)$ нақты сандар жұптарының жиыны арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатуға болатыны белгілі.

O нүктесінің координаттары $(0;0)$. OX өсінде жатқан нүктелердің координаттары $(x;0)$ түрінде, ал OY өсінде жатқан нүктелердің координаттары $(0;\ y)$ түрінде болатындықтан, OX өсінің теңдеуі $y = 0$, ал OY өсінің теңдеуі $x = 0$ арқылы анықталады.

Координаттар өстері жазықтықты төрт **ширекке (квадрантқа)** бөледі. Әрбір ширек, оның нүктелерінің координаттарының таңбаларымен анықталады:

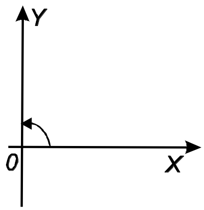
I ширек – $(x > 0,\ y > 0)$;

II ширек – $(x < 0,\ y > 0)$;

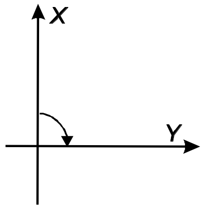
III ширек – $(x < 0,\ y < 0)$;

IV ширек – $(x > 0,\ y < 0)$.

Егер ордината өсі абсцисса өсінен O нүктесін айнала сағат тіліне қарсы $90°$ бұрышқа бұрылу арқылы алынса, онда декарттық координаттар жүйесі **оң** (3а-сурет), ал сағат тілімен бағыттас $90°$ бұрышқа бұрылу арқылы алынса, онда координаттар жүйесі **теріс** (3б-сурет) деп саналады.



3а-сурет



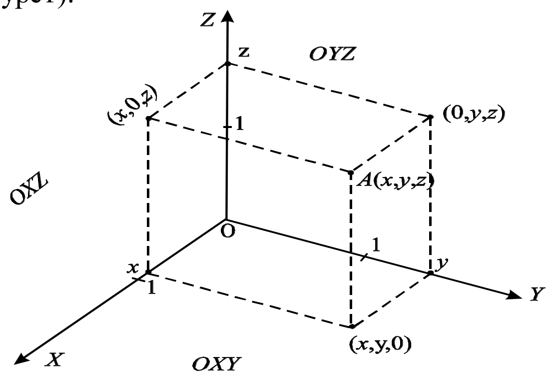
3б-сурет

Анықтама. ***Кеңістіктегі OXYZ тікбұрышты декарттық координаттар жүйесі*** *деп, координат бастары ортақ, бірлік кесінділері тең, өзара перпендикуляр орналасқан реттелген координат өстерінің үштігін: OX, OY, OZ айтады.*

Анықтамадан, бірінші координат өсі – OX, екінші координат өсі – OY, үшінші координат өсі (оны **аппликата өсі дейді) –** OZ арқылы белгіленгенін көреміз.

Кеңістікте A нүктесі мен L түзуі берілсін. A нүктесінің L түзуіне проекциясы деп, A нүктесі арқылы өтетін және L түзуіне ***перпендикуляр жазықтық*** пен осы L түзуінің A' қиылысу нүктесін айтады.

Кеңістіктегі A нүктесінің осы үш координат өстеріне проекциялары A **нүктесінің** $OXYZ$ тікбұрышты декарттық координаттар жүйесіндегі **координаттары** деп аталады да, $A(x;y;z)$ арқылы белгіленеді (4-сурет).



4-сурет

Кеңістіктегі нүктелер жиыны мен барлық $(x;y;z)$ үш нақты сандар жиынының арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатуға болатыны белгілі.

O нүктесінің координаттары – $O(0,0,0)$,

OX өсіндегі нүктелер координаттары – $(x,0,0)$,

OY өсіндегі нүктелер координаттары – $(0,y,0)$,

OZ өсіндегі нүктелер координаттары – $(0,0,z)$,

түрінде болады. Олай болса, OX, OY және OZ координаттар өстерін келесі теңдеулер жүйесімен анықтауға болады:

$$OX:\begin{cases} y=0, \\ z=0 \end{cases}, \quad OY:\begin{cases} x=0, \\ z=0 \end{cases}, \quad OZ:\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}.$$

Екі координат өсі арқылы өтетін жазықтық – **координаттық жазықтық** деп аталады. Координаттық жазықтық үшеу:

OXY жазықтығындағы нүктелер координаттары – $(x,y,0)$,

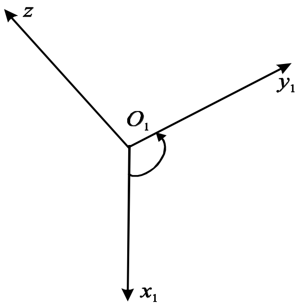
OYZ жазықтығындағы нүктелер координаттары – $(0,y,z)$,

OXZ жазықтығындағы нүктелер координаттары – $(x,0,z)$

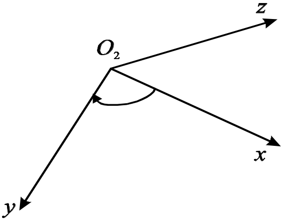
және оларды сәйкес келесі теңдеулермен анықтауға болады:

$$OXY:\ z=0, \qquad OYZ:\ x=0, \qquad OXZ:\ y=0.$$

Координаттық жазықтықтар кеңістікті **октанттар (жарты ширектер)** деп аталатын 8 бөлікке бөледі. Әрбір октант ондағы нүктелердің координаттарының таңбаларымен анықталады. **Мысалы,** 1-ші октант $x>0,\ y>0,\ z>0$ теңсіздіктерімен анықталады.



Оң Д.К.Ж.



Теріс Д.К.Ж.

5-сурет

3-ші координат өсінің оң таңбалы нүктесінен қарағанда, 1-ші өстен 2-ші өске қарай жақын тұспен айналу сағат тіліне қарсы бағытта орындалса *OXYZ* координат жүйесі **оң,** олай болмаса ол **теріс** жүйе деп саналады (5-сурет).

§ 2.2. Векторлар және оларға қолданылатын сызықтық амалдар

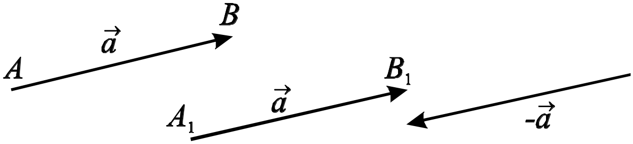
Векторлар ұғымы белгілі бір бағыты бар шамаларды сипаттауға пайдаланылады. Оларға мысалдар ретінде күш, жылдамдық, орын ауыстыруды атауға болады.

Анықтама. ***Вектор*** *деп, өзіне-өзін параллель орын ауыстыруға болатын, бағытталған АВ кесіндісін айтады және оны* $\overrightarrow{AB}$ *арқылы белгілейді. Мұндағы А мен В нүктелері –* ***векторды****ң сәйкес* ***басы*** *мен* ***ұшы*** *деп аталады.*

$\overrightarrow{AB}$ векторының модулі (ұзындығы) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ деп, AB кесін-дісінің ұзындығын айтады және ол $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |AB|$ символымен белгіленеді.

Егер A және B нүктелері беттессе, онда ол $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ арқылы белгіленеді де **нөл вектор** деп аталады. Нөл вектордың модулі нөлге тең $\left(\left|\vec{0}\right| = 0\right)$, ал бағыты болмайды, анықталмаған.

Бағыты мен модулі арқылы вектор толық анықталады. Ал өзіне өзін параллель орын ауыстырғаннан вектордың бағыты мен модулі өзгермейді. Сондықтан да модулдері тең және бағыттары беттесетін кез келген $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторлары – **тең векторлар** деп аталады және олар жалғыз $\vec{a}$ векторын анықтайды: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ ($\vec{a}$ векторын қою **а** әрпімен де белгілейді) (6-сурет).



6-сурет

Векторды өзіне өзін параллель орын ауыстыруға болатындықтан, вектор басы етіп кез келген нүктені алуға болады.

Бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын векторлар **коллинеар** деп аталады және олар $\overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2}$ арқылы белгіленеді. Нөл вектор кез келген векторға коллинеар деп есептеледі.

$\vec{a}$ векторына коллинеар, модулі $|\vec{a}|$ тең, бағыты $\vec{a}$ векторының бағытына қарсы вектор $\vec{a}$ **векторына қарама-қарсы вектор** деп аталады және $-\vec{a}$ арқылы белгіленеді (6-суретті қараңыз). Егер $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ болса, онда $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.

Анықтама. *$\vec{a}$ векторы мен α санының көбейтіндісі деп,* келесі үш шартты қанағаттандыратын $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ векторын айтады:

1) $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$;

2) $\vec{b} \parallel \vec{a}$;

3) $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$ векторы $\alpha > 0$ болса, $\vec{a}$ векторымен бағыттас, ал $\alpha < 0$ болса, $\vec{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталған.

Егер $\alpha = 0$ болса, онда $\alpha\vec{a} = \vec{0}$.

Анықтамадан, $\vec{a}$ векторы мен $-1 \cdot \vec{a}$ қарама қарсы векторлар болатынын көреміз (көз жеткізіңіз), сондықтан, $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

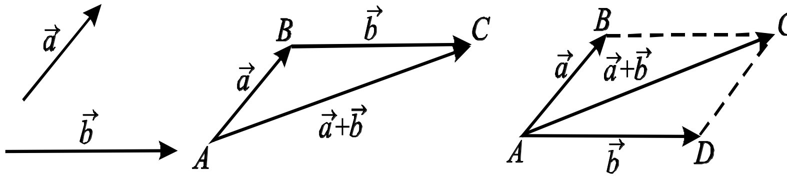
Назар аударыңыз! Анықтаманың екінші шарты бойынша, $\vec{a}$ векторы мен α санының көбейтіндісі $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ – осы $\vec{a}$ векторына коллинеар вектор.

Кері тұжырым да дұрыс: **Егер** $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ ***векторлары*** **коллинеар болса, онда** $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ **теңдігі орындалатындай жалғыз** α *санын табуға болады.* Шынында да, коллинеар, нөл емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары үшін $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$ теңдігі орындалатын α және $-\alpha$ сандары бар екені түсінікті. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар векторлары бағыттас болса $\alpha > 0$ санын, ал $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар векторларының бағыттары өзара қарама қарсы болса $\alpha < 0$ санын алсақ, онда $\vec{a}$ векторы мен α

санын көбейту ережесінің үш шарты да орындалады да $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ аламыз. Сонымен, келесі теорема дәлелденді:

Теорема. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болуы үшін, $\vec{a} = \alpha\,\vec{b}$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Анықтама. *$\vec{a}$ векторының ұшы мен $\vec{b}$ векторының басы беттестірілген жағдайда, $\vec{a}$* ***және*** *$\vec{b}$* ***векторларының қосындысы*** *$\vec{a}+\vec{b}$ деп, басы $\vec{a}$ векторының басы, ал ұшы $\vec{b}$ векторының ұшы болатын $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$ векторын айтады* (*7-сурет*).



7-сурет

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының қосындысын табу үшін *«үшбұрыш ережесін»* пайдалануға болады: кез келген A нүктеге $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ векторын салып, содан соң $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ векторын тұрғызса, $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ шығады; немесе «*параллелограмм ережесін*» пайдалануға болады: $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының бастарын ортақ A нүктесінде түйістіреді де $\left(\overrightarrow{AB} = \vec{a},\ \ \overrightarrow{AD} = \vec{b}\right)$, оларды қабырғалар етіп, параллелограмм тұрғызады. Осылай алынған параллеллограмның A нүктесінен шығатын $\overrightarrow{AC}$ диоганалі $\vec{a}+\vec{b}$ болады. Анықтамадан, ***қарама-қарсы векторлардың қосындысы нөл вектор*** болатынын көреміз, ал ***коллинеар векторлардың қосындысы осы векторларға коллинеар вектор*** болады (көз жеткізіңіз).

Бірнеше $\vec{a}_i,\ i = 1,2,...,n$ векторларды қосу үшін, әрбір келесі $\vec{a}_i$ векторының басын алдыңғы $\vec{a}_{i-1}$ векторының ұшымен түйістіреді де, бірінші $\vec{a}_1$ векторының басы мен соңғы $\vec{a}_n$ векторының ұшын қосып $\vec{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{a}_i$ векторын тұрғызады (8-сурет).

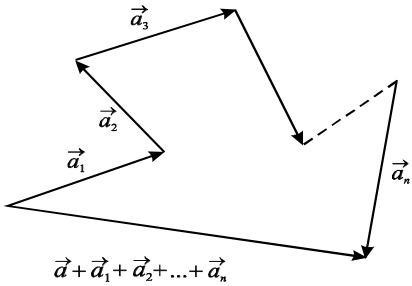
Келесі қасиеттердің орындалатыны орта мектеп курсында дәлелденген:

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ $-$(*коммутативті*);

2°. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ $-$(*ассоциативті*);

3°. $(\alpha\ \beta)\ \vec{a}=\alpha(\beta\ \vec{a})$ – (*сандық көбейткіштерге қатысты ассоциативті*);

4°. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\ \vec{a}+\beta\ \vec{a}$ $-$(*сандарды қосуға қатысты дистрибутивті*);



8-сурет

5°. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\ \vec{a}+\alpha\ \vec{b}$ $-$(*векторларды қосуға қатысты дистрибутивті*);

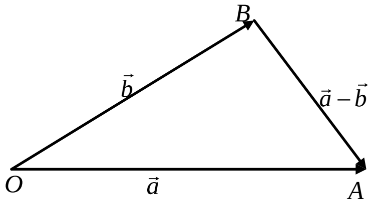
6°. $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ – кез келген векторға нөл векторды қосқанмен, ол өзгермейді;

7°. $\mathbf{a}+(-1)\mathbf{a}=\mathbf{0}$ – кез келген $\mathbf{a}$ векторы үшін $(-1)\mathbf{a}$ векторы қарама-қарсы вектор;

8°. $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$ – векторды бірге көбейткенмен, ол өзгермейді.

Анықтама. *$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының* ***айырымы*** деп, $\vec{a}$ векторы мен $\vec{b}$ векторына қарама-қарсы вектордың қосындысына тең $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ векторын айтады.

Бір нүктеден шығатын $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторының айырымын: $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ салу үшін, $\vec{b}$ векторының ұшын $\vec{a}$ векторының ұшымен қосатын вектор тұрғызса болғаны (9-сурет), немесе $\vec{a}-\vec{b}=$ $=\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$ (мұнда $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{BA}$ теңдігінің орындалатынын тексеріңіз).



9-сурет

Анықтама. *Бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатқан* $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ *векторлары* ***компланар*** *деп* аталады.

Анықтама. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ ***векторларының сызықтық комбинациясы*** *деп,* $c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+...+c_n\vec{a}_n=\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{a}_i$ *векторын айтады. Мұндағы* c_i, $i=1,2,...,n$ *сандары сызықтық комбинацияның коэффициенттері деп аталады.*

Векторлардың сызықтық комбинацияның қасиеттері:

егер $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ векторлары коллинеар болса, онда олардың кез келген сызықтық комбинациясы да осы векторларға коллинеар вектор;

егер $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ векторлары компланар болса, онда олардың кез келген сызықтық комбинациясы да осы векторларға компланар болады (векторлардың қосындысы қосылғыш векторлар жатқан жазықтықта жатады).

§ 2.3. Түзудің, жазықтықтың және кеңістіктің базистері. Векторларға жасалатын амалдарды арифметикалық амалдар арқылы орындау

(Атап айтылмаса, төменде қарастырылатын $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторларын нөл емес векторлар деп қабылдау керек.)

Анықтама. *Түзудегі кез келген нөл емес $\vec{e}$ векторы **түзу базисі** деп аталады; Кез келген коллинеар емес $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ векторлардың реттелген жұбы **жазықтық базисі** деп аталады; Кез келген компланар емес $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ векторлардың реттелген үштігі **кеңістік базисі** деп аталады.*

Базис туралы теорема. *Кеңістіктегі* кез келген $\vec{a}$ векторы, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базистік векторлардың сызықтық комбинациясы болады және ол комбинация жалғыз:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3; \qquad (1)$$

(мұндағы x, y, z сандарын $\vec{a}$ ***векторының*** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ***базисіндегі координаттары*** дейді де, оны $\vec{a} = (x, y, z)$ арқылы белгілейді. Бұл жағдайда, $\vec{a}$ ***векторы*** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ***базисінде берілді*** немесе $\vec{a}$ ***векторы*** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ***базисіне жіктелді*** дейді;

Сол сияқты, *жазықтықтағы* кез келген $\vec{a}$ векторы, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базистік векторлардың сызықтық комбинациясы болады және ол комбинация жалғыз:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2; \qquad (2)$$

($\vec{a}$ векторының $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базисіндегі координаттары $(x; y)$:

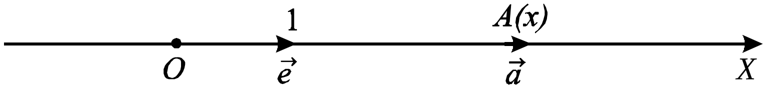
$\vec{a} = (x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$);

Түзудегі кез келген $\vec{a}$ векторы, $\vec{e}_1$ (немесе $\vec{e}$) базистік вектордың сызықтық комбинациясы болады және ол комбинация жалғыз:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 \quad \text{немесе} \quad \vec{a} = x\vec{e} \qquad (3)$$

($\vec{a}$ векторының $\vec{e}$ базисіндегі координаты (x): $\vec{a} = (x) = x\vec{e}$).

▼ (3) теңдіктің дұрыстығын көру қиын емес. Өйткені $\vec{a}$ мен $\vec{e}$ векторлары коллинеар болғандықтан **§ 2.2 Теорема** бойынша, (3) теңдік орындалатындай x саны табылады (10-сурет).



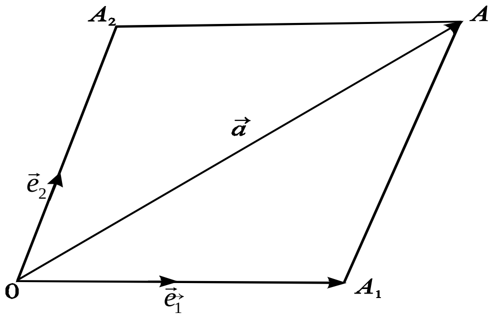
10-сурет

(3) теңдіктің басқа түрі болмайтындығын көрсету үшін

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}, \quad x \neq x_1 \tag{3'}$$

теңдігі орындалатын x санынан басқа x_1 саны да бар болсын деп жориық. Онда (3) теңдіктен (3′) теңдікті мүшелеп шегерсек қарама-қайшылыққа келеміз: $\vec{o} = (x - x_1)\vec{e}_1$, яғни $x - x_1 = 0$, $x = x_1$.

Нөл емес екі вектордың ең болмағанда біреуі екіншісінің сызықты комбинациясы болса, тек сонда ғана олар коллинеар болады.



11-сурет

Енді (2) теңдікті дәлелдейік. $\vec{e}_1$ мен $\vec{e}_2$ векторларын ортақ О бас нүктесіне келтіреміз де, $\vec{a}$ векторының ұшынан $\vec{e}_1$ векторына параллель түзу жүргіземіз. A_2 нүктесі осы түзу мен $\vec{e}_2$ вектор өсінің қиылысу нүктесі болсын (11-сурет). Онда $\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A}$ болады. Бұдан $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{e}_1$ және $\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{OA_2}=y\vec{e}_2$ болғандықтан, $\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ аламыз.

Енді (2) комбинацияның жалғыз екенін көрсетейік. (2) теңдіктегі комбинациядан басқа тағы да бір комбинация бар болсын деп ұйғарайық, яғни $\vec{a}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2$ және $x\neq x_1,\ y\neq y_1$ болсын. Онда (2) теңдіктен осы теңдікті мүшелеп шегерсек $\vec{o}=\left(x-x_1\right)\vec{e}_1+\left(y-y_1\right)\vec{e}_2$, ал бұдан $x-x_1=0,\ y-y_1=0$ шығады (шынында да, мысалы, $x-x_1\neq 0$ болса, онда $\vec{e}_1=\dfrac{y_1-y}{x-x_1}\vec{e}_2$, яғни, $\vec{e}_1\parallel\vec{e}_2$). Алынған $x=x_1,\ y=y_1$ теңдіктері (2) комбинацияның жалғыз екенін көрсетеді.

Үш вектордың ең болмағанда біреуі қалған коллинеар емес екі вектордың сызықты комбинациясы болса, тек сонда ғана олар компланар болады.

Шынында да, егер $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ болса, онда $\vec{c}$, $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$ векторларының бастары мен ұштары бір жазықтықта жатқандықтан олар (демек $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлары да) компланар.

Тапсырма. Теореманы үш өлшемді кеңістік үшін дәлелдеңіз. ▲

Енді векторларға жасалатын амалдарды олардың коорди-наттары арқылы орындауға (арифметикалауға) болатынын көрсетейік.

1-теорема. Векторларды қосқанда олардың сәйкес координаттары қосылады; векторды санға көбейткенде, оның барлық координаттары осы санға көбейтіледі.

▼ Теореманы үш өлшемді кеңістік үшін дәлелдейік. Егер $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ базисінде $\vec{a}=x_a\vec{e}_1+y_a\vec{e}_2+z_a\vec{e}_3$, $\vec{b}=x_b\vec{e}_1+y_b\vec{e}_2+z_b\vec{e}_3$ векторлары берілсе, онда векторларға жасалған амалдарға қатысты **§ 2.2,** 1^0-8^0 қасиеттердің қажеттілерін пайдаланып

$$\vec{a}+\vec{b}=x_a\vec{e}_1+y_a\vec{e}_2+z_a\vec{e}_3+x_b\vec{e}_1+y_b\vec{e}_2+z_b\vec{e}_3=$$

$$=(x_a+x_b)\vec{e}_1+(y_a+y_b)\vec{e}_2+(z_a+z_b)\vec{e}_3,\quad \text{яғни,}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(x_a+x_b,y_a+y_b,z_a+z_b\right)\ \text{аламыз.}$$

Кез келген λ саны үшін **§ 2.2,** 1^0-8^0 қасиеттердің қажеттілерін пайдаланып $\lambda\,\vec{a}=\lambda(x_a\vec{e}_1+y_a\vec{e}_2+z_a\vec{e}_3)=\lambda\,x_a\vec{e}_1+\lambda\,y_a\vec{e}_2+\lambda\,z_a\vec{e}_3$ алу-ға болады, яғни $\lambda\,\vec{a}=(\lambda x_a,\lambda y_a,\lambda z_a)$. ▲

2-теорема. $\vec{a}=(x_a,y_a,z_a)$ және $\vec{b}=(x_b,y_b,z_b)$ векторлары тең болуы үшін олардың сәйкес координаттарының тең болуы қажетті және жеткілікті: $\vec{a}=\vec{b}\ \Leftrightarrow\ (x_a=x_b,\ y_a=y_b,\ z_a=z_b)$.

▼ $\vec{a}=\vec{b},$ немесе $x_a\vec{e}_1+y_a\vec{e}_2+z_a\vec{e}_3=x_b\vec{e}_1+y_b\vec{e}_2+z_b\vec{e}_3$ болсын. Алдымен теңдіктің екі жағына $-x_b\vec{e}_1-y_b\vec{e}_2-z_b\vec{e}_3$ векторын қосып, **§ 2.2,** 1^0-8^0 қасиеттерді пайдаланамыз, сонымен бірге векторлардың теңдік белгісі мен $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ векторларының базис (яғни, компланар емес) екендігін ескереміз:

$$\vec{a}=\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad x_a\vec{e}_1+y_a\vec{e}_2+z_a\vec{e}_3-x_b\vec{e}_1-y_b\vec{e}_2-z_b\vec{e}_3=\vec{0}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad(x_a-x_b)\vec{e}_1+(y_a-y_b)\vec{e}_2+(z_a-z_b)\vec{e}_3=\vec{0}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x_a-x_b=0,\ y_a-y_b=0,\ z_a-z_b=0\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x_a=x_b,\ y_a=y_b,\ z_a=z_b.$$

Керісінше, егер $x_a=x_b,\ y_a=y_b,\ z_a=z_b$ теңдіктері берілсе, онда көрсетілген түрлендірулер тізбегін кері қарай орындай отырып $\vec{a}=\vec{b}$ аламыз. ▲

3-теорема. (*Координаттары берілген векторлардың коллинеарлық белгісі*) $\vec{a}=(x_a,y_a,z_a)$ және $\vec{b}=(x_b,y_b,z_b)$ $(\vec{a}\neq\vec{o})$ векторлары коллинеар болуы үшін олардың сәйкес координаттарының пропорционал болуы қажетті және жеткілікті:

$$\vec{b}\parallel\vec{a}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x_b}{x_a}=\frac{y_b}{y_a}=\frac{z_b}{z_a}=\lambda\,.$$

▼ Егер $\vec{b}\parallel\vec{a}$ болса, онда

$$\vec{b}=\lambda\,\vec{a}\quad\Leftrightarrow\quad(x_b,y_b,z_b)=(\lambda\,x_a,\lambda\,y_a,\lambda\,z_a)\,.$$

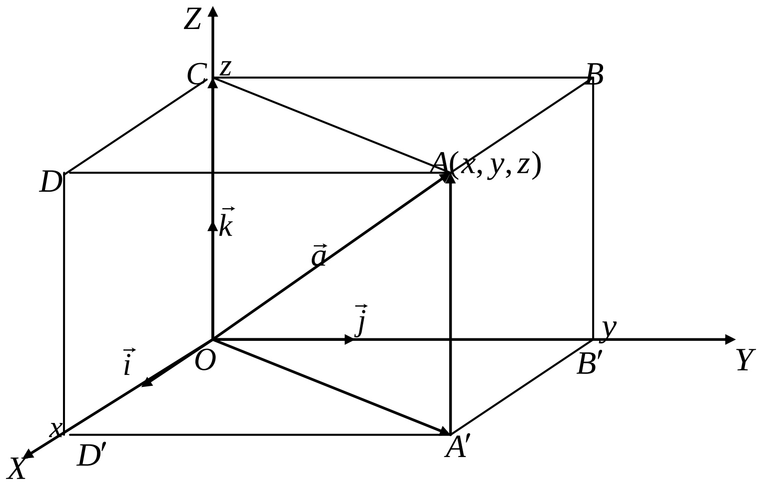
Соңғы теңдіктен 2-теорема бойынша $x_b = \lambda\, x_a$, $y_b = \lambda\, y_a$, $z_b = \lambda\, z_b$ немесе

$$\frac{x_b}{x_a} = \frac{y_b}{y_a} = \frac{z_b}{z_a} = \lambda \qquad (4)$$

аламыз. Керісінше, (4) теңдіктер орындалса, онда $\vec{b} \parallel \vec{a}$ екенін көру қиын емес. ▲

Жазықтықтағы векторлар үшін келтірілген тұжырымдардағы үшінші координаттар жазылмайды ($z = 0$). Мысалы, $\vec{b} = (2, -4)$ мен $\vec{a} = (-1, 2)$ векторлары коллинеар, өйткені $\frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = -2.$

Кеңістіктегі $OXYZ$ тікбұрышты декарт координаттар жүйесінің OX, OY, OZ координат өстерінің бірлік векторлары: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $\left(\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1\right)$ кеңістік базисін құрайды. Оларды, ***ортонормаланған базис*** және OX, OY, OZ өстерінің **орттары** деп атайды (12-суретті қараңыз).



12-сурет

Кеңістіктің кез келген A нүктесін алайық. Басы координат бас нүктесінде, ұшы A нүктесінде болатын $\overrightarrow{OA}$ векторы A нүктесінің **радиус-векторы** деп аталады. Ал $\overrightarrow{OA}$ ***радиус-векторының*** $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ***базисіндегі координаттары оның А ұшының (нүктесінің) координаттарындай*** болады. Шынында да, егер $A=(x,y,z)$ болса, онда жоғарыда көрсеткеніміздей келесі теңдіктерді жаза аламыз:

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z).$$

Осы жағдайға байланысты, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ базисінде берілген $\overrightarrow{OA}$ векторды **А** нүктесі (вектордың ұшы) деп, және керісінше, **А** нүктесін $\overrightarrow{OA}$ векторы деп атай береді.

Тікбұрышты координаттар жүйесінде берілген $A=(x_a,y_a,z_a)$ ***және*** $B=(x_b,y_b,z_b)$ ***нүктелері арқылы құралған*** $\overrightarrow{AB}$ ***векторының*** $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ***базисіндегі координаттары В және А нүктелерінің сәйкес координаттарының айырымдарына тең:***

$$\overrightarrow{AB}=(x_b-x_a,y_b-y_a,z_b-z_a). \tag{5}$$

Шынында да, $\overrightarrow{AB}$ векторын екі радиус-вектордың айырымы арқылы өрнектеуге болады

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k})-(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})=$$
$$=(x_b-x_a)\vec{i}+(y_b-y_a)\vec{j}+(z_b-z_a)\vec{k}.$$

Мысалы, егер $A(1,-1,1)$, $B(2,3,4)$ берілсе, онда $\overrightarrow{AB}=\left(2-1,\ \ 3-(-1),\ \ 4-1\right)=(1,4,3)=\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}.$

Мысал. Берілген $A(-5,1,6)$, $B(1,4,3)$, $C(6,3,9)$ нүктелерінің координаттары бойынша $\vec{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ векторын табу керек.

Шешуі: $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларын $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ базисіне жіктейміз:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1;4;3)-(-5;1;6)=(6;3;-3),$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(5;-6;-2)-(-4;2;3)=(9;-8;-5).$$

Векторларға жасалатын сызықтық амалдарды орындаймыз:

$$\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 4\cdot(6;3;-3) + (9;-8;-5) = (24;12;-12) + (9;-8;-5) =$$
$$= (33;4;-17). \qquad \textit{Жауабы: } \vec{a} = 33\vec{i} + 4\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Тақырыпқа арналған сұрақтар

1. Түзудегі, жазықтықтағы және кеңістіктегі тікбұрышты декарттық координаттар жүйесі қалай анықталады? Нүктенің осы жүйелердегі координаттарын қалай анықтайды?
2. Вектор, вектордың модулі, нөл вектор ұғымдарының анықтама-ларын келтіріңіз.
3. Коллинеар, компланар векторлардың анықтамаларын келтіріңіз.
4. Тең векторлардың анықтамасын келтіріңіз?
5. Векторларға жасалатын сызықтық амалдарды анықтаңыз. Олардың қандай қасиеттері бар?
6. Түзудегі, жазықтықтағы, кеңістіктегі базис деген не? Кез келген векторды базистік векторлар арқылы жіктеу туралы теореманы түзу, жазықтық және кеңістік үшін тұжы-рымдаңыз.
7. Векторларға жасалатын сызықтық амалдарды арифметикалау деген не және ол қалай орындалады?
8. Векторлардың қандай да бір базистегі кординаттары арқылы екі вектордың **тең**дігін анықтаңыз.
9. Екі вектордың **коллинеар**лығын, осы векторлардың қандай да бір базистегі кординаттары арқылы анықтаңыз.
10. Қандай базис ортонормальданған деп аталады? Радиус-вектор деген не және оның ортонормальданған базистегі координаттары қалай анықталады?

§ 2.4. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

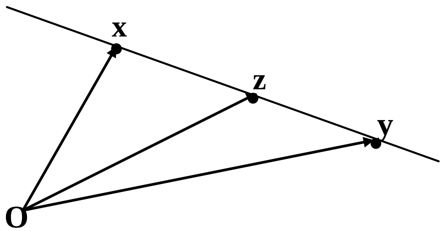
Векторлар төменде қою әріптермен белгіленген.

Егер R^n, $n=1,2,3$ кеңістігінде ($n=1$ – түзу, $n=2$ – жазықтық, $n=3$ – кеңістік) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ нүктелері (радиус-векторлары) берілсе, онда $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ кесіндісінің кез келген $\mathbf{z}$ нүктесін (радиус векторын) $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mu(\mathbf{y}-\mathbf{x})$, $0\le\mu\le1$ немесе $\mathbf{z}=(1-\mu)\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$, $0\le\mu\le1$ теңдігі-мен анықтай аламыз. Соңғы теңдікте $\lambda=1-\mu$ деп алсақ, $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ кесіндісін келесі теңдікті қанағаттандыратын $\mathbf{z}$ нүктелерінің жиыны ретінде қарастыруға болады:

$$\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y},\ \ \lambda,\mu\ge0,\ \ \lambda+\mu=1. \tag{1}$$

Мұнда, $\mu=0$, $\lambda=1$ болса $\mathbf{z}=\mathbf{x}$, ал $\lambda=0$, $\mu=1$ болса, $\mathbf{z}=\mathbf{y}$ шығады. Егер $\lambda+\mu=1$ теңдігі сақталатындай $\lambda>0$, $\mu>0$ сандары берілсе, онда $\mathbf{z}$ нүктесі $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ кесіндісінің ішінде жатады.

Теорема. $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$, $\lambda,\mu\ge0$, $\lambda+\mu=1$ нүктесі $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ кесіндісін, ұзындықтары $\mu:\lambda$ қатынасындай болатын $[\mathbf{x},\mathbf{z}]$ және $[\mathbf{z},\mathbf{y}]$ кесінділеріне бөледі (13-сурет).



13-сурет

▼ Жоғарыда айтылғандай, (1) теңдікті келесі теңдіктерге ауыстыруға болады:

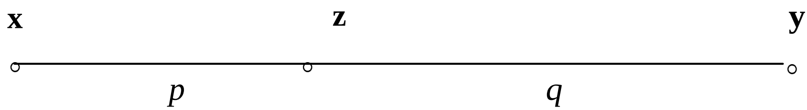
$\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mu(\mathbf{y}-\mathbf{x})$, $0\le\mu\le1$ және $\mathbf{z}=\mathbf{y}+\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, $0\le\lambda\le1$. Бұл екі теңдіктен келесі сәйкес теңдіктер шығады

$$|\mathbf{z}-\mathbf{x}| = \mu|\mathbf{y}-\mathbf{x}|, \tag{2}$$

$$|\mathbf{z}-\mathbf{y}| = \lambda|\mathbf{x}-\mathbf{y}|. \tag{3}$$

Енді (2) теңдікті (3) теңдікке мүшелеп бөлсек теореманың растығын көреміз: $\dfrac{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} = \dfrac{\mu}{\lambda}$. ▲

Есеп. $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ ***кесіндісін*** $p:q \quad (p>0, q>0)$ ***қатынасындай етіп бөлетін*** $\mathbf{z}$ ***нүктесін табу керек.***



▼ Егер $\dfrac{q}{p+q} = \lambda, \quad \dfrac{p}{p+q} = \mu$ деп алсақ, онда $\lambda, \mu \geq 0, \quad \lambda+\mu=1$ шарттары орындалатынын көреміз. Олай болса,

$$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \frac{q}{p+q}\mathbf{x} + \frac{p}{p+q}\mathbf{y} = \frac{q\mathbf{x}+p\mathbf{y}}{p+q}. \quad ▲ \tag{4}$$

Бұл теңдікті үш өлшемді кеңістіктегі нүктелердің $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3), \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ координаттары бойынша жазсақ:

$$z_j = \frac{qx_j + py_j}{p+q}, \quad j = 1,2,3 \tag{5}$$

аламыз (көз жеткізіңіз). Дербес жағдайда, $p = q = 1$ болса ($\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$ жағдайы), онда ***кесіндінің ортасы*** шығады

$$z_j = \frac{x_j + y_j}{2}, \quad j = 1,2,3. \tag{5′}$$

Мысал. $A(1,\ 1,\ 2)$ және $B(4,\ 7,\ 8)$ нүктелерін қосатын кесін-діні 2:1 қатынасындай етіп бөлетін $C(x,y,z)$ нүктесін табу керек.

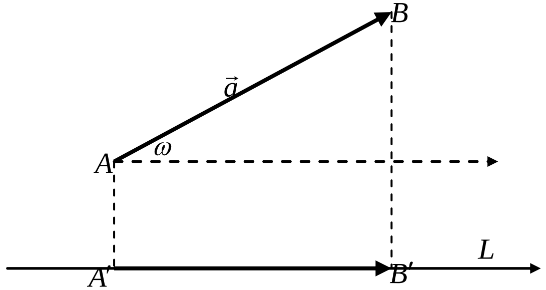
▼ $p=2,\quad q=1$ деп алып (5) теңдіктерді пайдаланамыз:

$$x=\frac{1\cdot1+2\cdot4}{1+2}=3,\quad y=\frac{1\cdot1+2\cdot7}{1+2}=5,\quad z=\frac{1\cdot2+2\cdot8}{1+2}=6.$$

Жауабы: $C(3;\ 5;\ 6)$. ▲

§ 2.5. Векторлардың түзуге проекциясы. Векторлардың скаляр көбейтіндісі және оның қасиеттері

$\vec{a}$ векторы мен бағытталған L түзуінің арасындағы бұрыш ω тең болсын (14-сурет) .



14-сурет

1-Анықтама. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ***векторының бағытталған L түзуіне (векторлық) проекциясы*** $(Пр_L\vec{a})$ ***деп,*** $\overrightarrow{A'B'}$ ***векторын*** айтады: $Пр_L\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$, мұндағы $A',\ B'$ нүктелері A мен B нүктелерінің L түзуіндегі проекциялары.

Егер $\vec{a}$ векторы мен L түзуінің арасындағы бұрыш сүйір болса ($0<\omega=\angle(\vec{a},L)<90^\circ$), онда $\overrightarrow{A'B'}$ векторының (проекцияның) бағыты L түзуінің бағытымен беттеседі, ал ол бұрыш доғал болса ($90^\circ<\omega=\angle(\vec{a},L)<180^\circ$), онда $\overrightarrow{A'B'}$ векторының (проекцияның) бағыты L түзуінің бағытына қарама қарсы болады. Осы жәйтті ескере отырып $\vec{a}$ векторының бағытталған L түзуіне проекциясын келесі түрде де анықтауға болады.

2-Анықтама. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ***векторының L бағытталған түзуге (скаляр) проекциясы*** *деп,* $\vec{a}$ *векторының модулі мен* $\omega=\angle(\vec{a},L)$ *бұрышының косинусының көбейтіндісін айтады:*

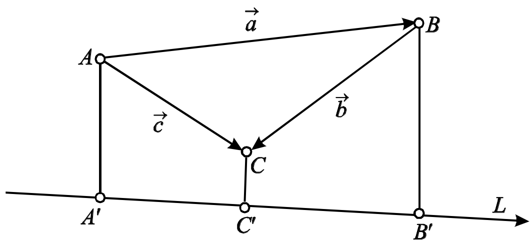
$$\Pi p_L\vec{a}=|\vec{a}|\cos\omega=|\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},L),\quad 0\le\omega\le\pi\,. \tag{1}$$

$\vec{a},\vec{b}$ векторларының проекциялары үшін келесі қасиеттер орындалады:

$$1^\circ.\ \Pi p_L(\vec{a}+\vec{b})=\Pi p_L\vec{a}+\Pi p_L\vec{b}; \tag{2}$$

$$2^\circ.\ \Pi p_L(\alpha\vec{a})=\alpha\ \Pi p_L\vec{a} \tag{3}$$

▼ 1° дұрыстығын $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ деп алып, 15-суреттен аңғаруға болады.



15-сурет

2° дәлелдейік. Егер $\alpha>0$ болса, онда $\angle(\alpha\vec{a},L)=\angle(\vec{a},L)=\omega$ болады да,

$$\mathit{\Pi}p_L\alpha\vec{a}=|\alpha\cdot\vec{a}|\cdot\cos\angle(\alpha\vec{a},L)=|\alpha|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\angle(\vec{a},L)=\alpha\mathit{\Pi}p_L\vec{a}$$

аламыз.

Егер $\alpha<0$ болса, онда $\angle(\alpha\vec{a},L)=\pi-(\vec{a},L)$ теңдігін ескереміз:

$$\mathit{\Pi}p_L\alpha\vec{a}=|\alpha\cdot\vec{a}|\cdot\cos\angle(\alpha\vec{a},L)=|\alpha|\cdot|\vec{a}|\cos\left[\pi-\angle(\vec{a},L)\right]=$$

$$=-\alpha\cdot|\vec{a}|\cdot\left[-\cos\angle(\vec{a},L)\right]=\alpha\cdot Пp_L\vec{a}.$$

Ал $\alpha=0$ үшін 2° дұрыстығы айқын көрініп тұр. ▲

Бірінші, қасиеттен, $\vec{a}=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}$ теңдігін пайдалансақ

$\Pi p_L\vec{a}=\Pi p_L[(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}]=\Pi p_L(\vec{a}-\vec{b})+\Pi p_L\vec{b},$ ал бұдан келесі теңдік шығады:

$$\Pi p_L(\vec{a}-\vec{b})=\Pi p_L\vec{a}-\Pi p_L\vec{b}. \tag{4}$$

Анықтама. $\vec{a}$ ***мен*** $\vec{b}$ ***векторларының скаляр көбейтіндісі*** *деп, осы векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы ω бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең* $(\vec{a},\vec{b})$ *немесе* $\vec{a}\ \vec{b}$ *арқылы белгіленетін санды айтады:*

$$\vec{a}\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})\,. \tag{5}$$

(1) теңдікті ескеріп, (5) теңдікті келесі түрде де жаза аламыз:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\Pi p_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\Pi p_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{6}$$

яғни *екі вектордың скаляр көбейтіндісін табу үшін,* ***біреуінің модулін екіншісінің осы вектордағы проекциясына көбейту*** керек.

Скаляр көбейтіндінің мынадай қасиеттері бар:

$$(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a}), \tag{7}$$

$$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c}), \tag{8}$$

$$(\vec{a},\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b}). \tag{9}$$

(7) теңдік тікелей скаляр көбейтінді анықтамасынан шығады.

(8) ***теңдіктің дәлелдеуі***:

▼ $$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\Pi p_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\left(\Pi p_{\vec{a}}\vec{b}+\Pi p_{\vec{a}}\vec{c}\right)=$$

$$=|\vec{a}|\Pi p_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\Pi p_{\vec{a}}\vec{c}=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c}).$$ ▲

(9) ***теңдіктің дәлелдеуі***:

▼ $(\vec{a},\alpha\vec{b})=|\vec{a}|\cdot \Pi p_{\vec{a}}(\alpha\vec{b})=|\vec{a}|\cdot\alpha\cdot\Pi p_{\vec{a}}\vec{b}=\alpha\cdot(\vec{a},\vec{b}).$ ▲

Мысалы, $\left(2\vec{a}-3\vec{b},4\vec{c}+\vec{d}\right)=8\vec{a}\vec{c}+2\vec{a}\vec{d}-12\vec{b}\vec{c}-3\vec{b}\vec{d}.$

Нөл емес $\vec{a},\vec{b}$ векторлары үшін келесі қатыстар орындалады:

1) $(\vec{a},\vec{b})=0 \;\Leftrightarrow\; \angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}$, яғни ($\vec{a},\vec{b}$ векторлары ортогональ);

2) $(\vec{a},\vec{b})>0 \;\Leftrightarrow\; 0<\angle(\vec{a},\vec{b})<\frac{\pi}{2}$;

3) $(\vec{a},\vec{b})<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{2}<\angle(\vec{a},\vec{b})<\pi.$

Кез келген $\vec{a}$ векторы үшін келесі теңдікті жазуға болады:

$$(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2. \qquad (10)$$

Тікбұрышты декарттық координаттар жүйесінің координата өстерінің орттары $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ үшін мына теңдіктер орындалады:

$$(\vec{i},\vec{i})=(\vec{j},\vec{j})=(\vec{k},\vec{k})=1, \qquad (11)$$

$$(\vec{i},\vec{j})=(\vec{i},\vec{k})=(\vec{j},\vec{k})=0. \qquad (12)$$

Енді векторларды скаляр көбейтуді арифметикалық амалдар арқылы орындауға болатынын көрсетейік.

Егер $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базисінде $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ векторлары берілсе, онда:

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (13)$$

▼ Шынында да, (7), (8), (9), (11), (12) теңдіктерін пайдалансақ

$$\vec{a}\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=$$

$$=x_1x_2\vec{i}\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\vec{k}+y_1x_2\vec{j}\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\vec{j}+y_1z_2\vec{j}\vec{k}+$$

$$+z_1x_2\vec{k}\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\vec{j}+z_1z_2\vec{k}\vec{k}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$ ▲

Егер $\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ болса, онда (10) және (13) теңдіктерден $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ал бұдан $\vec{a} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ векторының модулін аламыз:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (14)$$

Егер $\vec{a} = (x, y, z),$, $\vec{b} = (x', y', z')$ берілсе, онда (14) теңдіктен $\vec{a}$ ***мен*** $\vec{b}$ ***нүктелерінің*** ($\vec{a}$, $\vec{b}$ радиус векторларының ұштарының) ***арақашықтығының формуласы*** шығады:

$$|AB| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}. \qquad (15)$$

Ал (13), (14) теңдіктерін пайдалана отырып, $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ теңдігінен $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторларының арасындағы φ бұрышын табу формуласын жаза аламыз:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (16)$$

Мысалы, $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 5, 6)$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos\varphi = \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2}} = \frac{32}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}} = \frac{32}{7\sqrt{22}}.$$

(16) теңдіктен $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторларының ортогональдық $(\vec{a} \perp \vec{b})$ белгісін алуға болады:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \qquad (17)$$

Анықтама. *Нөл емес* $\vec{a}$ *векторының* ***бағыттаушы косинустары*** *деп* $\vec{a}$ *векторы мен* OX, OY, OZ *өстерінің оң бағыттарының арасындағы сәйкес* α, β, γ *бұрыштарының косинустарын айтады.*

$\vec{a}=(x,y,z)$ векторының бағыттаушы косинустары:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (18)$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (19)$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad (20)$$

Өйткені ((16) қараңыз), $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\cos\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}||\vec{j}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Бағыттаушы косинустар үшін

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (21)$$

теңдігінің орындалатынын тексеру қиын емес.

Назар аударыңыз! Егер $\vec{a}$ векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ базисінде берілсе, онда ол толық анықталған, өйткені оның модулі (14), ал бағыты (18),(19),(20) теңдіктерімен есептеледі.

Кез келген нөл емес $\vec{a}=(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ векторының **ортының** $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ базисіндегі координаттарын табайық ((18), (19), (20) теңдіктерді қараңыз):

$$\overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{|\vec{a}|}=\frac{x}{|\vec{a}|}\vec{i}+\frac{y}{|\vec{a}|}\vec{j}+\frac{z}{|\vec{a}|}\vec{k}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}.$$

Олай болса, $\vec{a}$ вектордың бағыттаушы косинустары, осы вектордың $\overrightarrow{a^0}$ ортының $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ базисіндегі координаттары екен:

$$\vec{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \qquad (22)$$

Мысалы, $\vec{a} = (1, 2, 2)$ векторының орты

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\vec{k} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

ал модулі $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$ тең.

Тақырыпқа арналған сұрақтар мен тапсырмалар

1. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласын қорытып шыға-рыңыз.
2. Вектордың бағытталған түзуге проекциясы деген не? Оның қандай қасиеттері бар? Осы қасиеттерді дәлелдеңіз.
3. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі деген не? Оның қандай қасиеттері бар? Осы қасиеттерді дәлелдеңіз.
4. Векторлардың скаляр көбейтіндісін арифметикалық амалдарға қалай көшіруге болады?.
5. Тікбұрышты декарттық координаттар жүйесінде вектордың моду-лінің, екі вектор арасындағы бұрыштың, екі нүкте арақашық-тығының формулаларын қорытып шығарыңыз.
6. Векторлардың ортогональдық белгісін осы векторлардың орто-нормальданған базистегі координаттары арқылы жазыңыз.
7. Вектордың бағыттаушы косинустарын табу формулаларын қорытып шығарыңыз және вектор ортының координаттарын жазыңыз.

Тақырыпқа арналған есептер:

№1. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлары берілген:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{b} = -9\vec{i} + 2\vec{k}, \quad \vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}.$$

а) $3\vec{b}$, $-8\vec{c}$ векторлардың скаляр көбейтіндісін табу керек;

б) $\vec{a},\ \vec{c}$ векторлары ортогональ бола ма? **Жауабы:** а) 984.

№2. Берілгені: $\vec{b} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$.

$\vec{a}\vec{b}$ – скаляр көбейтіндіні табу керек. **Жауабы:** 2.

№3. Берілгені: $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ \angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ ·

$\vec{a}\vec{b}$ скаляр көбейтіндіні табу керек. **Жауабы:** $3\sqrt{3}$

№4. Берілгені: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k},\ \ \vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

Табу керек: $\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. **Жауабы:** $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

№5. Берілгені. $|\vec{b}| = 4,\ \ (\angle\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$.

Табу керек: $(2\vec{a} + \vec{b})\vec{b}$. **Жауабы:** 16.

2.1–ҮТ

1. Берілгені: $\vec{a} = \alpha\,\vec{m} + \beta\,\vec{n};\ \vec{b} = \gamma\,\vec{m} + \delta\,\vec{n};\ |\vec{m}| = k;\ |\vec{n}| = \iota$;

$\angle\left(\vec{m},\vec{n}\right) = \varphi$.

Табу керек: **а)** $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})(\nu\vec{a} + \tau\vec{b})$; **б)** $ПР_{\vec{b}}\left(\nu\,\vec{a} + \tau\,\vec{b}\right)$;

в) $\cos\angle\left(\vec{a},\tau\vec{b}\right)$.

1.1. $\alpha = -5,\ \beta = -4,\ \gamma = 3,\ \delta = 6,\ \kappa = 3,\ \iota = 5,\ \varphi = \frac{5\pi}{3},\ \lambda = -2,$ $\mu = \frac{1}{5},\ \nu = 1,\ \tau = 2.$ **Жауабы:** а) 2834.

1.2. $\alpha = -2,\ \beta = 3,\ \gamma = 4,\ \delta = -1,\ \kappa = 1,\ \iota = 3,\ \varphi = \pi,\ \lambda = 3,\ \mu = 2,$ $\nu = -2,\ \tau = 4.$ **Жауабы**: а) –950.

1.3. $\alpha = 5,\ \beta = -2,\ \gamma = -3,\ \delta = -1,\ \kappa = 4,\ \iota = 5,\ \varphi = \frac{4\pi}{3},\ \lambda = 2,\ \mu = 3,$ $\nu = -1,\ \tau = 5.$ **Жауабы:** а) –1165.

1.4. $\alpha=5,\ \beta=2,\ \gamma=-6,\ \delta=-4,\ \kappa=3,\ \iota=2,\ \varphi=\frac{5\pi}{3},\ \lambda=-1,\ \mu=\frac{1}{2},$ $\nu=2,\ \tau=3.$ **Жауабы:** а) 410.

1.5. $\alpha=3,\ \beta=-2,\ \gamma=-4,\ \delta=5,\ \kappa=2,\ \iota=3,\ \varphi=\frac{\pi}{3},\ \lambda=2,\ \mu=-3,$ $\nu=5,\ \tau=1.$ **Жауабы:** а) 750.

1.6. $\alpha=2,\ \beta=-5,\ \gamma=-3,\ \delta=4,\ \kappa=2,\ \iota=4,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \lambda=3,\ \mu=-4,$ $\nu=2,\ \tau=3.$ **Жауабы**: а) –2116.

1.7. $\alpha=3,\ \beta=2,\ \gamma=-4,\ \delta=-2,\ \kappa=2,\ \iota=5,\ \varphi=\frac{4\pi}{3},\ \lambda=1,\ \mu=-3,$ $\nu=0,\ \tau=-\frac{1}{2}.$ **Жауабы:** а) 165.

1.8. $\alpha=5,\ \beta=2,\ \gamma=1,\ \delta=-4,\ \kappa=3,\ \iota=2,\ \varphi=\pi,\ \lambda=1,\ \mu=-2,$ $\nu=3,\ \tau=-4.$ **Жауабы:** а) 121.

1.9. $\alpha=-3,\ \beta=-2,\ \gamma=1,\ \delta=5,\ \kappa=3,\ \iota=6,\ \varphi=\frac{4\pi}{3},\ \lambda=-1,\ \mu=2,$ $\nu=1,\ \tau=1.$ **Жауабы:** а) 1287.

1.10. $\alpha=5,\ \beta=-3,\ \gamma=4,\ \delta=2,\ \kappa=4,\ \iota=1,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \lambda=2,\ \mu=-\frac{1}{2},$ $\nu=3,\ \tau=0.$ **Жауабы:** а) 2337.

1.11. $\alpha=-2,\ \beta=3,\ \gamma=3,\ \delta=-6,\ \kappa=6,\ \iota=3,\ \varphi=\frac{5\pi}{3},\ \lambda=3,\ \mu=-\frac{1}{3},$ $\nu=1,\ \tau=2.$ **Жауабы:** а) –936.

1.12. $\alpha=-2,\ \beta=-4,\ \gamma=3,\ \delta=1,\ \kappa=3,\ \iota=2,\ \varphi=\frac{7\pi}{3},\ \lambda=-\frac{1}{2},\ \mu=3,$ $\nu=1,\ \tau=2.$ **Жауабы:** а) 320.

1.13. $\alpha=4,\ \beta=3,\ \gamma=-1,\ \delta=2,\ \kappa=4,\ \iota=5,\ \varphi=\frac{3\pi}{2},\ \lambda=2,\ \mu=-3,$ $\nu=1,\ \tau=2.$ **Жауабы:** а) 352.

1.14. $\alpha=-2,\ \beta=3,\ \gamma=5,\ \delta=1,\ \kappa=2,\ \iota=5,\ \varphi=2\pi,\ \lambda=-3,\ \mu=4,$ $\nu=2,\ \tau=3.$ **Жауабы:** а) 1809.

1.15. $\alpha=4,\ \beta=-3,\ \gamma=5,\ \delta=2,\ \kappa=4,\ \iota=7,\ \varphi=\frac{4\pi}{3},\ \lambda=-3,\ \mu=2,$ $\nu=2,\ \tau=-1.$ **Жауабы:** а) –5962.

1.16. $\alpha=-5,\ \beta=3,\ \gamma=2,\ \delta=4,\ \kappa=5,\ \iota=4,\ \varphi=\pi,\ \lambda=-3,\ \mu=\frac{1}{2},$ $\nu=-1,\ \tau=1.$ **Жауабы:** а) 3348.

1.17. $\alpha=5,\ \beta=-2,\ \gamma=3,\ \delta=4,\ \kappa=2,\ \iota=5,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \lambda=2,\ \mu=3,$ $\nu=1,\ \tau=-2.$ **Жауабы**: а) –2076.

1.18. $\alpha=7,\ \beta=-3,\ \gamma=2,\ \delta=6,\ \kappa=3,\ \iota=4,\ \varphi=\frac{5\pi}{3},\ \lambda=3,\ \mu=-\frac{1}{2},$ $\nu=2,\ \tau=1.$ **Жауабы:** а) 1728.

1.19. $\alpha=4,\ \beta=-5,\ \gamma=-1,\ \delta=3,\ \kappa=6,\ \iota=3,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \lambda=2,\ \mu=-5,$ $\nu=1,\ \tau=2.$ **Жауабы:** а) 1044.

1.20. $\alpha=3,\ \beta=-4,\ \gamma=-2,\ \delta=3,\ \kappa=1,\ \iota=6,\ \varphi=\frac{3\pi}{2},\ \lambda=4,\ \mu=5,$ $\nu=1,\ \tau=-2.$ **Жауабы:** а) 1994.

1.21. $\alpha=-5,\ \beta=-6,\ \gamma=2,\ \delta=7,\ \kappa=2,\ \iota=7,\ \varphi=\pi,\ \lambda=-2,\ \mu=5,$ $\nu=1,\ \tau=3.$ **Жауабы**: а) 29767.

1.22. $\alpha=-7,\ \beta=2,\ \gamma=4,\ \delta=6,\ \kappa=2,\ \iota=9,\ \varphi=\frac{\pi}{3},\ \lambda=1,\ \mu=2,$ $\nu=-1,\ \tau=3.$ **Жауабы:** а) 20758.

1.23. $\alpha=5,\ \beta=4,\ \gamma=-6,\ \delta=2,\ \kappa=2,\ \iota=9,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \lambda=3,\ \mu=2,$ $\nu=1,\ \tau=-1/2.$ **Жауабы:** а)2751.

1.24. $\alpha=-5,\ \beta=-7,\ \gamma=-3,\ \delta=2,\ \kappa=2,\ \iota=11,\ \varphi=\frac{3\pi}{2},\ \lambda=-3,$ $\mu=4,\ \nu=-1,\ \tau=2.$ **Жауабы**: а) 38587.

1.25. $\alpha=5,\ \beta=-8,\ \gamma=-2,\ \delta=3,\ \kappa=4,\ \iota=3,\ \varphi=\frac{4\pi}{3},\ \lambda=2,\ \mu=-3,\ \nu=1,\ \tau=2.$ **Жауабы**: а) 1048.

1.26. $\alpha=-3,\ \beta=5,\ \gamma=1,\ \delta=7,\ \kappa=4,\ \iota=6,\ \varphi=\frac{5\pi}{3},\ \lambda=-2,\ \mu=3,$ $\nu=3,\ \tau=-2.$ **Жауабы:** а) 2532.

1.27. $\alpha=-3,\ \beta=4,\ \gamma=5,\ \delta=-6,\ \kappa=4,\ \iota=5,\ \varphi=\pi,\ \lambda=2,\ \mu=3,$ $\nu=-3,\ \tau=-1.$ **Жауабы:** а) 3956.

1.28. $\alpha=6,\ \beta=-7,\ \gamma=-1,\ \delta=-3,\ \kappa=2,\ \iota=6,\ \varphi=\frac{4\pi}{3},\ \lambda=3,$ $\mu=-2,\ \nu=1,\ \tau=4.$ **Жауабы:** а) 12880.

1.29. $\alpha=5,\ \beta=3,\ \gamma=-4,\ \delta=-2,\ \kappa=6,\ \iota=3,\ \varphi=\frac{5\pi}{3},\ \lambda=-2,$ $\mu=-1/2,\ \nu=3,\ \tau=2.$ **Жауабы**: а) –2916.

1.30. $\alpha=4,\ \beta=-3,\ \gamma=-2,\ \delta=6,\ \kappa=4,\ \iota=7,\ \varphi=\frac{\pi}{3},\ \lambda=2,$ $\mu=-1/2,\ \nu=3,\ \tau=2.$ **Жауабы**: а) –801.

2. *A*, *B*, *C* нүктелерінің берілген координаттары бойынша:
а) $\vec{a}$ векторының модулін;
б) $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін;
в) $\vec{c}$ векторының $\vec{d}$ векторындағы проекциясын;
г) l кесіндісін $\alpha:\beta$ қатынасындай етіп бөлетін *M* нүктесінің координаттарын
табу керек.

2.1. $A(4,6,3)$, $B(-5,2,6)$, $C(4,-4,-3)$, $\vec{a}=4\,\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AB$, $\alpha=5$, $\beta=4$.

Жауабы: а) $\sqrt{4216}$; б) 314; г) $(-1,\frac{34}{9},\frac{14}{3})$.

2.2. $A(4,3,-2)$, $B(-3,-1,4)$, $C(2,2,1)$, $\vec{a}=-5\,\overrightarrow{AC}+2\,\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=BC$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

Жауабы: а) $\sqrt{82}$; б) –50; г) $(-1,\frac{1}{5},\frac{14}{5})$.

2.3. $A(-2,-2,4)$, $B(1,3,-2)$, $C(1,4,2)$, $\vec{a}=2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=1$.

Жауабы: а) $\sqrt{1432}$; б) -61; г) $(-1,-\frac{1}{3},2)$.

2.4. $A(2,4,3)$, $B(3,1,-4)$, $C(-1,2,2)$, $\vec{a}=2\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{c}=\vec{b}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=1$, $\beta=4$. **Ж**: а) $\sqrt{300}$; б) 78; г) $(\frac{14}{5},\frac{8}{5},-\frac{13}{5})$.

2.5. $A(2,4,5)$, $B(1,-2,6)$, $C(-1,-2,4)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\vec{b}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=3$. **Жауабы:** а) 11; б) -20; г) $(\frac{8}{5},\frac{8}{5},\frac{21}{5})$.

2.6. $A(-1,-2,4)$, $B(-1,3,5)$, $C(1,4,2)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\vec{b}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AC$, $\alpha=1$, $\beta=7$. **Ж:** а) $\sqrt{410}$; б) 70; г) $(-\frac{3}{4},-\frac{5}{4},\frac{15}{4})$.

2.7. $A(1,3,2)$, $B(-2,4,-1)$, $C(1,3,-2)$, $\vec{a}=2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\vec{b}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=4$. **Жауабы:** а) $\sqrt{491}$; б) 4; г) $(0,\frac{10}{3},1)$.

2.8. $A(2,-4,3)$, $B(-3,-2,4)$, $C(0,0,-2)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{CB}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=AC$, $\alpha=2$, $\beta=1$.

Жауабы: а) $\sqrt{1957}$; б) -29; г) $(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$.

2.9. $A(3,4,-4)$, $B(-2,1,2)$, $C(2,-3,1)$, $\vec{a}=5\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

Жауабы: а) $\sqrt{1265}$; б) -294; г) $(-\frac{4}{7},\frac{13}{7},\frac{2}{7})$.

2.10. $A(0,2,5)$, $B(2,-3,4)$, $C(3,2,-5)$, $\vec{a}=-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CB}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AC$, $\alpha=3$, $\beta=2$. **Жауабы:** а) $\sqrt{2846}$; б) -420; г) $(\frac{9}{5},2,-1)$.

2.11. $A(-2,-3,-4)$, $B(2,-4,0)$, $C(1,4,5)$, $\vec{a}=4\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=AB$, $\alpha=4$, $\beta=2$.

Жауабы: а) $\sqrt{1712}$; б) 100; г) $(\frac{2}{3},-\frac{11}{3},-\frac{4}{3})$.

2.12. $A(-2,-3,-2)$, $B(1,4,2)$, $C(1,-3,3)$, $\vec{a}=2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=1$.

Жауабы: а) $\sqrt{856}$; б)238; г)$(1,-\frac{5}{4},\frac{11}{4})$.

2.13. $A(5,6,1)$, $B(-2,4,-1)$, $C(3,-3,3)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=2$.

Жауабы: а) $\sqrt{2649}$; б)–160; г)$(1,-\frac{1}{5},\frac{7}{5})$.

2.14. $A(10,6,3)$, $B(-2,4,5)$, $C(3,-4,-6)$, $\vec{a}=5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=CB$, $\alpha=1$, $\beta=5$.

Жауабы: а) $\sqrt{9470}$; б)–298; г)$(\frac{13}{6},-\frac{8}{3},-\frac{25}{6})$.

2.15. $A(3,2,4)$, $B(-2,1,3)$, $C(2,-2,-1)$, $\vec{a}=4\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=AC$, $\alpha=2$, $\beta=4$.

Жауабы: а) $\sqrt{362}$; б) 94; г) $(\frac{8}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3})$.

2.16. $A(-2,3,-4)$, $B(3,-1,2)$, $C(4,2,4)$, $\vec{a}=7\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

Жауабы: а) $\sqrt{4109}$; б) 554; г) $(-\frac{4}{7},\frac{13}{7},-\frac{16}{7})$.

2.17. $A(4,5,3)$, $B(-4,2,3)$, $C(5,-6,-2)$, $\vec{a}=9\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=BC$, $\alpha=5$, $\beta=1$.

Жауабы: а) $\sqrt{12089}$; б)–263; г)$(\frac{7}{2},-\frac{14}{3},-\frac{7}{6})$.

2.18. $A(2,4,6)$, $B(-3,5,1)$, $C(4,-5,-4)$, $\vec{a}=-6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{d}=\overrightarrow{BA}$, $l=BC$, $\alpha=1$, $\beta=3$.

Жауабы: а) $\sqrt{5988}$; б) 986; г) $(-\frac{5}{4},\frac{5}{2},-\frac{1}{4})$.

2.19. $A(-4,-2,-5)$, $B(3,7,2)$, $C(4,6,-3)$, $\vec{a}=9\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=BA$, $\alpha=4$, $\beta=3$.

Жауабы: а) $\sqrt{16740}$; б) -1308; г) $(-1,\frac{13}{7},-2)$.

2.20. $A(5,4,4)$, $B(-5,2,3)$, $C(4,2,-5)$, $\vec{a}=11\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=1$.

Жауабы: а) $\sqrt{11150}$; б) 1185; г) $(\frac{7}{4},2,-3)$.

2.21. $A(3,4,6)$, $B(-4,6,4)$, $C(5,-2,-3)$, $\vec{a}=-7\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=BA$, $\alpha=5$, $\beta=3$.

Жауабы: а) $\sqrt{18666}$; б) -487; г) $(\frac{3}{8},\frac{19}{4},\frac{21}{4})$.

2.22. $A(-5,-2,-6)$, $B(3,4,5)$, $C(2,-5,4)$, $\vec{a}=8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=AC$, $\alpha=3$, $\beta=4$.

Жауабы: а) $\sqrt{11387}$; б) 1549; г) $(-2,-\frac{23}{7},-\frac{12}{7})$.

2.23. $A(3,4,1)$, $B(5,-2,6)$, $C(4,2,-7)$, $\vec{a}=-7\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\vec{c}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $1=AB$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

Жауабы: а) $\sqrt{6826}$; б) -1120; г) $(\frac{19}{5},\frac{8}{5},3)$.

2.24. $A(4,3,2)$, $B(-4,-3,5)$, $C(6,4,-3)$, $\vec{a}=8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\vec{c}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BC$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

Жауабы: а) $\sqrt{1885}$; б) -434; г) $(-\frac{8}{7},-1,\frac{19}{7})$.

2.25. $A(-5,4,3)$, $B(4,5,2)$, $C(2,7,-4)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\vec{c}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=4$.

Жауабы: а) $\sqrt{608}$; б) –248; г) $\left(\frac{22}{7}, \frac{41}{7}, -\frac{4}{7}\right)$.

2.26. $A(6,4,5)$, $B(-7,1,8)$, $C(2,-2,-7)$, $\vec{a}=5\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AB$, $\alpha=3$, $\beta=2$.

Жауабы: а) $\sqrt{11899}$; б) 697; г) $\left(-\frac{9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{34}{5}\right)$.

2.27. $A(6,5,-4)$, $B(-5,-2,2)$, $C(3,3,2)$, $\vec{a}=6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\vec{c}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=BC$, $\alpha=1$, $\beta=5$.

Жауабы: а) $\sqrt{3789}$; б) 396; г) $\left(-\frac{11}{3}, -\frac{7}{6}, 2\right)$.

2.28. $A(-3,-5,6)$, $B(3,5,-4)$, $C(2,6,4)$, $\vec{a}=4\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=4$, $\beta=2$.

Жауабы: а) $\sqrt{14700}$; б) –508; г) $\left(-1, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

2.29. $A(3,5,4)$, $B(4,2,-3)$, $C(-2,4,7)$, $\vec{a}=3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BA}$ $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

Жауабы: а) $\sqrt{539}$; б) –85; г) $\left(\frac{26}{7}, \frac{20}{7}, -1\right)$.

2.30. $A(4,6,7)$, $B(2,-4,1)$, $C(-3,-4,2)$, $\vec{a}=5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\vec{c}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AB$, $\alpha=3$, $\beta=4$.

Жауабы: а) $\sqrt{1316}$; б) –40; г) $\left(\frac{22}{7}, \frac{12}{7}, \frac{31}{7}\right)$.

2.1–ҮТ орындау үлгісі

№1. Берілгені: $\vec{a}=-\vec{m}+6\vec{n}$; $\vec{b}=3\vec{m}+4\vec{n}$; $|\vec{m}|=2$; $|\vec{n}|=5$;

$$(\vec{m},\vec{n})=\frac{2\pi}{3}.$$

Табу керек: **а)** $\vec{a}\cdot\vec{b}$; **б)** $ПР_{\vec{b}}\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)$; **в)** $\cos\angle\left(2\vec{b}-\vec{a},\, 4\vec{b}\right)$.

▼ **а)** § 2.5, (5), (7)–(9) қасиеттерге сүйеніп есептейміз

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(-\vec{m}+6\vec{n}\right)\cdot\left(3\vec{m}+4\vec{n}\right)=-3\vec{m}^2+14|\vec{m}||\vec{n}|\cos<\left(\vec{m},\vec{n}\right)+24\vec{n}^2=$$

$$=-3\cdot 2^2+14\cdot 2\cdot 5\left(-\frac{1}{2}\right)+24\cdot 5^2=518;$$

б) Егер $\vec{c}=4\vec{a}-5\vec{b}=-19\vec{m}+4\vec{n}$ деп белгілесек, онда § 2.5, (6) – теңдіктерден $ПР_{\vec{b}}\vec{c}=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$ аламыз. Мұнда

$$\vec{c}\cdot\vec{b}=\left(-19\vec{m}+4\vec{n}\right)\cdot\left(3\vec{m}+4\vec{n}\right)=-57\vec{m}^2-64|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m},\vec{n}\right)+16\vec{n}^2=492.$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{\left(3\vec{m}+4\vec{n}\right)^2}=$$
$$\sqrt{9\vec{m}^2+24|\vec{m}||\vec{n}|\cos\angle\left(\vec{m},\vec{n}\right)+16\vec{n}^2}=\sqrt{316}$$

болғандықтан $ПР_{\vec{b}}\vec{c}=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=ПР_{\vec{b}}\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)=\dfrac{492}{\sqrt{316}}$ аламыз.

в) Егер $\vec{d}=2\vec{b}-\vec{a}=7\vec{m}+2\vec{n},\quad \vec{e}=4\vec{b}=12\vec{m}+16\vec{n}$ деп белгілесек, онда § 2.5, 16–формула бойынша, $\cos\angle\left(\vec{d},\vec{e}\right)=\dfrac{\vec{d}\ \vec{e}}{\left|\vec{d}\right|\left|\vec{e}\right|}$. Мұнда

$$\vec{d}\cdot\vec{e}=\left(7\vec{m}+2\vec{n}\right)\cdot\left(12\vec{m}+16\vec{n}\right)=$$

$$=84\vec{m}^2+136|\vec{m}||\vec{n}|\cos<\left(\vec{m},\vec{n}\right)+32\vec{n}^2=456,$$

$$\left|\vec{d}\right|=\sqrt{\left(7\vec{m}+2\vec{n}\right)^2}=\sqrt{49\vec{m}^2+28|\vec{m}||\vec{n}|\cos<\left(\vec{m},\vec{n}\right)+4\vec{n}^2}=\sqrt{156},$$

$$\left|\vec{e}\right|=\sqrt{\left(12\vec{m}+16\vec{n}\right)^2}=\sqrt{144\vec{m}^2+384|\vec{m}||\vec{n}|\cos<\left(\vec{m},\vec{n}\right)+256\vec{n}^2}=\sqrt{5056}$$

болғандықтан $\cos\angle\left(2\vec{b}-\vec{a},\, 4\vec{b}\right)=\dfrac{456}{\sqrt{788736}}$ аламыз. ▲

№2. Берілген $A(-5,1,6)$, $B(1,4,3)$, $C(6,3,9)$ нүктелердің координаттары бойынша:

а) $\vec{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ векторының модулін;

б) $\vec{a}$ мен $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ векторларының скаляр көбейтіндісін;

в) $\vec{c}=\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ векторының $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$ векторындағы проекциясын;

г) $l=AB$ кесіндісін 1:3 қатынасындай бөлетін M нүктесінің координаттарын табу керек.

▼ **а)** § 2.3, (5) формуланы және 1-теореманы пайдаланамыз

$\overrightarrow{AB}=(1-(-5),\,4-1,\,3-6)=(6,\ 3,\ -3)$, $\overrightarrow{BC}=(5,\ -1,\ 6\ )$,

$4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(29,11,-6)$, $\left|4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{29^2+11^2+(-6)^2}=\sqrt{998}$;

б) $\vec{a}=(29,11,-6)$, $\vec{b}=(5,-1,6\ )$ векторларын скаляр көбейте-міз (§2.5, (13)–формула) $\vec{a}\cdot\vec{b}=29\cdot5+11\cdot(-1)+(-6)\cdot6=98$;

в) §2.5, (6) теңдіктер бойынша $ПР_{\vec{d}}\vec{c}=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|}$, мұнда

$d=(6,3,-3)$, $\vec{c}\cdot\vec{d}=30-3-18=9$, $\left|\vec{d}\right|=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54}$

болғандықтан, $ПР_{\vec{d}}\vec{c}=\dfrac{9}{\sqrt{54}}$;

г) Есеп шартынан (§ 2.4, (5) қараңыз) $p=1$, $q=3$ деп алып,

$x_M=\dfrac{qx_A+px_B}{p+q}$, $y_M=\dfrac{qy_A+py_B}{p+q}$, $z_M=\dfrac{qz_A+pz_B}{p+q}$ формулаларын

пайдаланамыз: $x_M=\dfrac{3\cdot(-5)+1\cdot(-1)}{3+1}=-\dfrac{7}{2}$, $y_M=\dfrac{3\cdot1+1\cdot4}{3+1}=\dfrac{7}{4}$,

$z_M=\dfrac{3\cdot6+1\cdot3}{3+1}=\dfrac{21}{4}$. *Жауабы*: $M\left(-\dfrac{7}{2},\dfrac{7}{4},\dfrac{21}{4}\right)$. ▲

§ 2.6. Векторлық көбейтінді және оның қасиеттері

Анықтама. *Бастары ортақ бір нүктеге түйістірілген, компланар емес, реттелген ($\vec{a}$ – бірінші, $\vec{b}$ – екінші, $\vec{c}$ – үшінші) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлар үштігі берілсін. Егер үшінші $\vec{c}$ вектордың ұшынан қарағанда, бірінші вектордың екінші векторға қарай жақын тұспен бұрылуы сағат тіліне қарама-қарсы бағытта орындалса, онда $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ –* ***оң үштік векторлар,*** *ал сағат тілімен бағыттас орындалса, онда $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ –* ***теріс үштік векторлар*** *деп аталады.*

Анықтама. $\vec{a}$ ***және*** $\vec{b}$ ***векторларының векторлық көбейтіндісі*** *деп, төмендегі үш шартты қанағаттандыратын* $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=\vec{a}\times\vec{b}$ **векторын** *айтады:*

1) $\vec{c}$ векторының модулі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының модульдері мен осы екі вектор арасындағы бұрыштың синусының көбейтіндісіне тең:

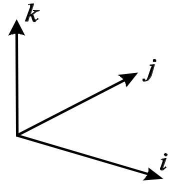
$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\angle\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi;$$

2) $\vec{c}$ *векторы* $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының әрбіреуіне ортогоаль, яғни ол $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр;

3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары – **реттелген оң үштік векторлар.**

Мысалы, (16-сурет):

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=j. \qquad (1)$$



16-сурет

▼ Бірінші теңдікті көрсетейік.

$|\vec{k}|=|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ және $i\perp j,\ \vec{k}\perp\vec{i},\ \vec{k}\perp\vec{j},$ болғандықтан:

1) $|\vec{k}|=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\sin\angle(\vec{i},\vec{j})$ теңдігі орындалады;

2) шарт көрініп тұр;

3) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – оң үштік векторлар екенін тексеру қиын емес.

Демек, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ теңдігі дұрыс. Осылайша қалған екі теңдікті де тексеруге болады. ▲

Векторлық көбейтінді үшін негізгі келесі үш қасиет:

1°. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ ***(антикоммутативтік)***;

2°. $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$ (***векторларды қосуға қатысты дистрибутивтік***);

3°. $[\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}] = \alpha\beta[\vec{a}, \vec{b}]$ (***сандарға көбейтуге қатысты ассоциативтік***)

орындалады.

Сонымен бірге мына қасиеттер де орындалады:

А) $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, яғни, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болуы үшін олардың векторлық көбейтіндісі нөл вектор болуы қажетті және жеткілікті.

(Бұл тұжырымның дұрыстығына көз жеткізу үшін, векторлық көбейту анықтамасын пайдалануға болады.)

$\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\vec{b} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ векторлары үшін келесі теңдік орындалады

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (2')$$

▼ Жоғарыдағы 1°–3° қасиеттерді пайдаланамыз:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= x_1x_2\vec{i} \times \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \times \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \times \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \times \vec{i} + y_1y_2\vec{j} \times \vec{j} + y_1z_2\vec{j} \times \vec{k} +$$
$$+ z_1x_2\vec{k} \times \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \times \vec{j} + z_1z_2\vec{k} \times \vec{k}.$$

Енді (1) теңдіктер мен (A) тұжырымынан тікелей шығатын

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0} \qquad (3)$$

теңдіктерін және 1° (антикоммутативтік) қасиетті пайдаланып есептейміз: $\vec{a}\times\vec{b}=x_1y_2\vec{k}-x_1z_2\vec{j}-y_1x_2\vec{k}+y_1z_2\vec{i}+z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}=$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \quad \blacktriangle$$

1-мысал. $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек:

$$\blacktriangledown \quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}(2\cdot6-3\cdot5)-\vec{j}(1\cdot6-3\cdot4)+\vec{k}(1\cdot5-2\cdot4)=$$

$$=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}=(-3,\ \ 6,\ \ -3). \quad \blacktriangle$$

2-мысал. Төбелері $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$, $C(3,2,1)$ нүктелерінде болатын үшбұрыш ауданын табу керек.

$\blacktriangledown$ ΔABC ауданы $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларына салынған параллелограмм ауданының жартысына тең (17-сурет).

Б) тұжырымын пайдалансақ, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Мұндағы

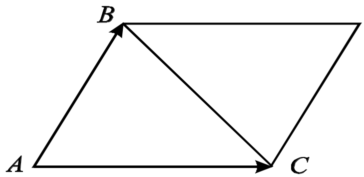
$$\overrightarrow{AB}=(1-1,\ \ 2-1,\ \ 3-1)=(0,\ 1,2), \qquad \overrightarrow{AC}=(3-1,\ 2-1,\ 1-1)=(2,1,0).$$

Олай болса, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}\right|=$

$$=\frac{1}{2}\left|(1\cdot0-2\cdot1)\vec{i}-(0\cdot0-2\cdot2)\vec{j}+(0\cdot1-1\cdot2)\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|-2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|-2\right|\cdot\left|\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}.$$

Жауабы: $\sqrt{6}$. ▲



17-сурет

Егер $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$ векторлары OXY координат жазықтығында жатса, онда $\vec{a}=(x_1,y_1,0)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,0)$ деп алып, осы векторларға салынған ***параллелограмм ауданын*** табуға болады:

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & 0\\ x_2 & y_2 & 0\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}\right|=\left|(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}\right|=\left|x_1y_2-y_1x_2\right|$$

немесе

$$S=\left|\begin{vmatrix}x_1y_1\\ x_2y_2\end{vmatrix}\right|. \qquad (4)$$

§ 2.7. Векторлардың аралас көбейтіндісі

Анықтама. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ***векторларының аралас көбейтіндісі*** *деп* $\vec{a},\ \vec{b}$ *векторларының* $\vec{a}\times\vec{b}$ *векторлық көбейтіндісі мен* $\vec{c}$ *векторының скаляр көбейтіндісін айтады:* $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$.

Егер $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ базисінде $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ векторлары берілсе, онда

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\right)\left(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

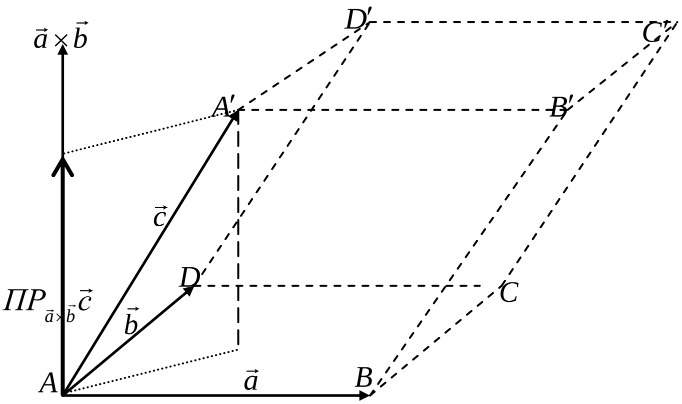
Сонымен егер $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ болса, онда

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{1}$$

Скаляр көбейтіндінің анықтамасына сүйеніп, (§2.5, (6) қараңыз) (1) теңдікті келесі түрлерде жазуға болады

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\Pi p_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\omega)\cdot\Pi p_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}. \tag{1'}$$

Мұндағы $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\omega$ шамасы $\vec{a},\ \vec{b}$ векторларына салынған $ABCD$ **параллелограмының ауданы,** ал $\left|\Pi p_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|$ шамасы $\vec{a}\ ,\vec{b},\ \vec{c}$ векторларына салынған $ABCDA'B'C'D'$ параллелепипедтің $ABCD$ табанына түсірілген **биіктік** (18-сурет) екенін ескерсек, онда $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ аралас көбейтіндісі $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторларына салынған параллелепипед көлемін «+» таңбасымен (егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ оң үштік болса), немесе «–» таңбасымен (егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ теріс үштік болса) алынатынын көреміз.



18-сурет

Сонымен $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларына салынған параллелепипед көлемі осы үш вектордың аралас көбейтіндісінің модуліне тең болады екен:

$$V_{пар-д} = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}\right| = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|. \qquad (2)$$

(1) теңдіктен анықтауыш қасиетін қолдана отырып, мына қатыстарды аламыз:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\vec{b}, \qquad (3)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = -(\vec{b}\times\vec{a})\vec{c} = -(\vec{a}\times\vec{c})\vec{b} = -(\vec{c}\times\vec{b})\vec{a}. \qquad (4)$$

Скаляр көбейтіндінің коммутативтік қасиеті бойынша $(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ болатынын ескерсек, онда (3) теңдіктердің біріншісін $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ түрінде жазуға болады. Ал бұл теңдік векторлардың аралас көбейтіндісін $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ символымен белгілеуге мүмкіндік береді:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}). \qquad (5)$$

Теорема. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлары компланар болуы үшін, олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең болуы, яғни

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \qquad (6)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

▼ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлары компланар болса, онда $\vec{a} \times \vec{b}$ векторы мен $\vec{c}$ векторы ортогональ, демек, (6) теңдік орындалады. Керісінше, егер (6) теңдік орындалса, онда $\vec{c}$ векторы $\vec{a} \times \vec{b}$ векторына перпендикуляр, сол себепті ол $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының жазықтығында немесе осы жазықтыққа параллель жазықтықта жатады, яғни $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланар векторлар. ▲

Тақырыпқа арналған сұрақтар мен тапсырмалар

8. Оң үштік векторлардың анықтамасын келтіріңіз.
9. Векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасын келті-ріңіз.
10. Векторлардың векторлық көбейтіндісінің қандай қасиеттері бар? Оларды дәлелдеңіз.
11. Векторлардың коллинеарлық белгісін осы векторлардың векторлық көбейтіндісі арқылы тұжырымдаңыз. Коллинеар емес екі векторға салынған параллелограммның ауданын осы вектор-лардың векторлық көбейтіндісі арқылы өрнектеңіз және оны дәлелдеңіз.
12. Векторлардың векторлық көбейтіндісі осы векторлардың $\vec{i}, \vec{j}, k$ базисіндегі координаттары арқылы қалай өрнектеледі?
13. Векторлардың аралас көбейтіндісі деген не және ол осы векторлардың $\vec{i}, \vec{j}, k$ базисіндегі координаттары арқылы қалай өрнек-теледі?

14. Үш нөл емес векторларға салынған параллелепипедтің көлемін осы векторлардың аралас көбейтіндісі арқылы өрнектеңіз және оны дәлелдеңіз.

15. Векторлардың компланарлық белгісін осы векторлардың аралас көбейтіндісі арқылы тұжырымдаңыз.

Тақырыпқа арналған есептер:

№1. $\vec{a} = 7\vec{i} - 5\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$, $\vec{b} = -7\vec{i} + 5\vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}$ векторлары берілген. Табу керек: $\vec{a} \times \vec{b}$. **Жауабы:** $\vec{0}$.

№2. Берілгені: $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары ортогональ және $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. Табу керек: $|\vec{a} \times \vec{b}.|$ **Жауабы:** 6.

№3. $\vec{a} = (2;-2;0)$, $\vec{b} = (1;1;1)$, $\vec{c} = (-1;3;0)$ векторларына салынған параллелепипедтің көлемін табу керек.

Жауабы: 4.

2.2–ҮТ

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары берілген.

а) үш вектордың аралас көбейтіндісін табу керек.
б) векторлардың векторлы көбейтіндісінің модулін табу керек;
в) векторлардың скаляр көбейтіндісін табу керек;
г) векторлар коллинеар немесе ортогональ болады ма?
д) векторлар компланар болады ма?

1.1. $\vec{a}=2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$;

а) $\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c}$; **б)** $3\vec{a}, 2\vec{c}$; **в)** $\vec{b}, -4\vec{c}$; **г)** $\vec{a}, \vec{c}$; **д)** $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$.

Жауабы: а)-261; б)$\sqrt{19116}$; в)40.

1.2. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 21\vec{k}$.

а) $5\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{c}$; **б)** $4\vec{b}, 2\vec{c}$; **в)** $\vec{a}, \vec{c}$; **г)** $\vec{b}, \vec{c}$; **д)** $2\vec{a}, -3\vec{b}, \vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 0; в) 6.

1.3. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j},\ \vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}.$

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$; **б)** $3\vec{a}, -7\vec{b}$; **в)** $-2\vec{a}, \vec{c}$; **г)** $\vec{a}, \vec{c}$; **д)** $2\vec{a}, -3\vec{b}, \vec{c}$.

Жауабы: а) -1740; б) $\sqrt{612108}$; в) 0.

1.4. $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k},\ \vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}.$

а) $\vec{a}, -2\vec{b}, -7\vec{c}$; **б)** $4\vec{b}, 3\vec{c}$; **в)** $2\vec{a}, -7\vec{c}$; **г)** $\vec{b}, \vec{c}$; **д)** $2\vec{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 0; в) 42.

1.5. $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k},\ \vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{c} = \vec{j} + 5\vec{k}.$

а) $\vec{a}, 6\vec{b}, 3\vec{c}$; **б)** $\vec{a}, 2\vec{b}$; **в)** $\vec{a}, -4\vec{c}$; **г)** $\vec{a}, \vec{b}$; **д)** $\vec{a}, 6\vec{b}, 3\vec{c}$.

Жауабы: а) -2538; б) $\sqrt{3192}$; в) 12.

1.6. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k},\ \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$

а) $\vec{a}, -3\vec{b}, 2\vec{c}$; **б)** $5\vec{a}, 3\vec{c}$; **в)** $-2\vec{a}, 4\vec{b}$; **г)** $\vec{a}, \vec{c}$; **д)** $5\vec{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 0; в) 56.

1.7. $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k},\ \vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$

а) $7\vec{a}, -4\vec{b}, 2\vec{c}$; **б)** $3\vec{a}, 5\vec{c}$; **в)** $2\vec{b}, 4\vec{c}$; **г)** $\vec{b}, \vec{c}$; **д)** $7\vec{a}, 2\vec{b}, 5\vec{c}$.

Жауабы: а) -4480; б) $\sqrt{78750}$; в) 0.

1.8. $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k},\ \vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}.$

а) $2\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c}$; **б)** $4\vec{a}, 3\vec{b}$; **в)** $\vec{b}, -4\vec{c}$; **г)** $\vec{a}, \vec{c}$; **д)** $2\vec{a}, 3\vec{b}, -4\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) $\sqrt{17280}$; в) 60.

1.9. $\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{k},\ \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{c} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}.$

а) $3\vec{a}, -4\vec{b}, 2\vec{c}$; **б)** $7\vec{a}, -3\vec{c}$; **в)** $3\vec{a}, \vec{b}$; **г)** $\vec{b}, \vec{c}$; **д)** $7\vec{a}, 2\vec{b}, -3\vec{c}$.

Жауабы: а) -1680; б) $\sqrt{219177}$; в) 78.

1.10. $\vec{a}=6\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k},\ \vec{b}=9\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}-8\vec{k}.$

а) $2\vec{a},-4\vec{b},3\vec{c}$; **б**)$3\vec{b},-9\vec{c}$; **в**)$3\vec{a},-5\vec{c}$; **г**)$\vec{a},\vec{b}$; **д**)$3\vec{a},-4\vec{b},-9\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 6488829 ; в) 630.

1.11. $\vec{a}=5\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k},\ \vec{c}=3\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k}.$

а) $\vec{a},-4\vec{b},2\vec{c}$; **б**) $-2\vec{b},4\vec{c}$; **в**) $-3\vec{a},6\vec{c}$; **г**)$\vec{b},\vec{c}$; **д**)$\vec{a},-2\vec{b},6\vec{c}$.

Жауабы: а) –2032; б) $\sqrt{127488}$; в) 504.

1.12. $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k},\ \vec{b}=4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k},\ \vec{c}=6\vec{i}+9\vec{j}-3\vec{k}.$

а) $-2\vec{a},\vec{b},-2\vec{c}$; **б**)$4\vec{b},7\vec{c}$; **в**)$5\vec{a},-3\vec{b}$; **г**)$\vec{b},\vec{c}$; **д**) $-2\vec{a},4\vec{b},7\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 0; в) –240 .)

1.13. $\vec{a}=-5\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k},\ \vec{b}=7\vec{i}-\vec{k},\ \vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}.$

а) $2\vec{a},4\vec{b},-5\vec{c}$; **б**) $-3\vec{b},11\vec{c}$; **в**)$8\vec{a},-6\vec{c}$; **г**)$\vec{a},\vec{c}$; **д**)$8\vec{a},-3\vec{b},11\vec{c}$.

Жауабы: а) 4360; б) $33\sqrt{682}$; в) 0.

1.14. $\vec{a}=-4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k},\ \vec{c}=-\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}.$

а) $5\vec{a},7\vec{b},2\vec{c}$; **б**)$11\vec{a},-4\vec{b}$; **в**)$3\vec{a},-7\vec{c}$; **г**)$\vec{a},\vec{b}$; **д**)$3\vec{a},7\vec{b},-2\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 0; в) 672.

1.15. $\vec{a}=-4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{j}+5\vec{k},\ \vec{c}=6\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}.$

а) $5\vec{a},-\vec{b},3\vec{c}$; **б**) $-7\vec{a},4\vec{c}$; **в**)$3\vec{a},9\vec{b}$; **г**)$\vec{a},\vec{c}$; **д**)$3\vec{a},-9\vec{b},4\vec{c}$.

Жауабы: а) –1170; б) $56\sqrt{638}$; в) –567.

1.16. $\vec{a}=-3\vec{i}+8\vec{j},\ \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k},\ \vec{c}=8\vec{i}+12\vec{j}-8\vec{k}.$

а) $4\vec{a},-6\vec{b},5\vec{c}$; **б**) $-7\vec{a},9\vec{c}$; **в**)$3\vec{b},-8\vec{c}$; **г**)$\vec{b},\vec{c}$; **д**)$4\vec{a},-6\vec{b},9\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) $252\sqrt{917}$; в) –1632.

1.17. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{b} = -9\vec{i} + 2\vec{k},\ \vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}.$

а) $7\vec{a}, 5\vec{b}, -\vec{c}$; **б**) $-5\vec{a}, 4\vec{b}$; **в**)$3\vec{b}, -8\vec{c}$; **г**)$\vec{a}, \vec{c}$; **д**)$7\vec{a}, 5\vec{b}, -\vec{c}$.

Жауабы: а) –10430; б) $40\sqrt{389}$; в) 984.

1.18. $\vec{a} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = 3\vec{i} - 15\vec{j} + 21\vec{k},\ \vec{c} = \vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}.$

а) $2\vec{a}, -7\vec{b}, 3\vec{c}$; **б**) $-6\vec{a}, 4\vec{c}$; **в**)$7\vec{a}, 5\vec{b}$; **г**)$\vec{b}, \vec{c}$; **д**)$2\vec{a}, -7\vec{b}, 4\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б)$48\sqrt{1466}$; в) 3255.

1.19. $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k},\ \vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{c} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}.$

а) $\vec{a}, -6\vec{b}, 2\vec{c}$; **б**) $-8\vec{b}, 5\vec{c}$; **в**) $-9\vec{a}, 7\vec{c}$; **г**)$\vec{a}, \vec{b}$; **д**)$\vec{a}, -6\vec{b}, 5\vec{c}$.

Жауабы: а) 1068; б)$\sqrt{478400}$; в) –315.

1.20. $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k},\ \vec{c} = -5\vec{i} + 10\vec{j} - 20\vec{k}.$

а) $-2\vec{a}, 7\vec{b}, 5\vec{c}$; **б**) $-6\vec{b}, 7\vec{c}$; **в**)$9\vec{a}, 4\vec{c}$; **г**)$\vec{b}, \vec{c}$; **д**) $-2\vec{a}, 7\vec{b}, 4\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 0; в) 6660.

1.21. $\vec{a} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k},\ \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k},\ \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}.$

а) $-3\vec{a}, 6\vec{b}, -\vec{c}$; **б**)$5\vec{b}, 3\vec{c}$; **в**)$7\vec{a}, -4\vec{b}$; **г**)$\vec{b}, \vec{c}$; **д**)$7\vec{a}, -4\vec{b}, 3\vec{c}$.

Жауабы: а)2196; б) $\sqrt{126900}$; в)1288.

1.22. $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k},\ \vec{c} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}.$

а) $3\vec{a}, -7\vec{b}, 2\vec{c}$; **б**)$2\vec{b}, 6\vec{c}$; **в**) $-4\vec{a}, -5\vec{c}$; **г**)$\vec{a}, \vec{c}$; **д**) $-4\vec{a}, 2\vec{b}, 6\vec{c}$.

Жауабы: а)28728; б) $\sqrt{870912}$; в)0.

1.23. $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k},\ \vec{c} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}.$

а) $6\vec{a}, 3\vec{b}, 8\vec{c}$; **б**)$6\vec{a}, -7\vec{b}$; **в**) $-5\vec{a}, 4\vec{c}$; **г**)$\vec{a}, \vec{b}$; **д**) $-5\vec{a}, 3\vec{b}, 4\vec{c}$.

Жауабы: а)0; б)0; в)–560.

1.24. $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k},\ \vec{c}=6\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}.$

а) $4\vec{a},-7\vec{b},-2\vec{c}$; **б**)$6\vec{a},-4\vec{c}$; **в**) $-2\vec{a},5\vec{b}$; **г**)$\vec{a},\vec{c}$; **д**)$6\vec{a},-7\vec{b},-2\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 0; в) 160.

1.25. $\vec{a}=-3\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k},\ \vec{c}=3\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}.$

а) $2\vec{a},-\vec{b},3\vec{c}$; **б**) $-9\vec{a},4\vec{c}$; **в**)$5\vec{b},-6\vec{c}$; **г**)$\vec{b},\vec{c}$; **д**)$2\vec{a},5\vec{b},-6\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б)$\sqrt{2519424}$; в) 900.

1.26. $\vec{a}=-3\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}-5\vec{k},\ \vec{c}=6\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}.$

а) -$2\vec{a},\vec{b},7\vec{c}$; **б**)$5\vec{a},-2\vec{c}$; **в**)$3\vec{b},\vec{c}$; **г**)$\vec{a},\vec{c}$; **д**) $-2\vec{a},3\vec{b},7\vec{c}$.

Жауабы: а) 1260; б) $10\sqrt{2997}$; в) 33.

1.27. $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}.$

а) -$3\vec{a},4\vec{b},-5\vec{c}$; **б**)$6\vec{b},3\vec{c}$; **в**)$\vec{a},4\vec{c}$; **г**)$\vec{b},\vec{c}$; **д**) $-3\vec{a},4\vec{b},-5\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 0; в) 80.

1.28. $\vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k},\ \vec{b}=5\vec{i}-\vec{j},\ \vec{c}=2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}.$

а) $\vec{a},7\vec{b},-2\vec{c}$; **б**) $-5\vec{a},4\vec{b}$; **в**) $-3\vec{a},8\vec{c}$; **г**)$\vec{a},\vec{c}$; **д**) $-3\vec{a},4\vec{b},8\vec{c}$.

Жауабы: а) 2114; б) $20\sqrt{857}$; в) 0.

1.29. $\vec{a}=-9\vec{i}+4\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k},\ \vec{c}=3\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}.$

а) $3\vec{a},-5\vec{b},-4\vec{c}$; **б**)$6\vec{b},2\vec{c}$; **в**) $-2\vec{a},8\vec{c}$; **г**)$\vec{b},\vec{c}$; **д**)$3\vec{a},6\vec{b},-4\vec{c}$.

Жауабы: а) 0; б) 0; в) -144.

1.30. $\vec{a}=5\vec{i}-6\vec{j}-4\vec{k},\ \vec{b}=4\vec{i}+8\vec{j}-7\vec{k},\ \vec{c}=3\vec{j}-4\vec{k}.$

а) $5\vec{a},3\vec{b},-4\vec{c}$; **б**)$\vec{a},4\vec{b}$; **в**)$7\vec{a},-2\vec{c}$; **г**)$\vec{a},\vec{b}$; **д**)$5\vec{a},4\vec{b},-2\vec{c}$.

Жауабы: а)11940; б) $4\sqrt{9933}$; в) 28.

2. Төбелері A, B, C және D нүктелері болатын пирамида берілген.

а) пирамиданың көрсетілген жағының ауданын;

б) пирамиданың l қырының ортасы және көрсетілген екі төбесі арқылы өтетін қима ауданын;

в) пирамиданың көлемін

табу керек.

2.1. $A(3,4,5)$, $B(1,2,1)$, $C(-2,-3,6)$, $D(3,-6,-3)$; а) ACD;

б) $l=AB$, C және D. **Жауабы:** а) $\sqrt{2114}$; б) $\dfrac{\sqrt{6174}}{2}$ в) 42.

2.2. $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$; а) BCD;

б) $l=CD$, A және B. **Жауабы:** а) $\sqrt{62}$; б) $\dfrac{\sqrt{8806}}{2}$; в) $\dfrac{83}{2}$.

2.3. $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$; а) ACD;

б) $l=BC$, A және D. **Жауабы:** а) $\dfrac{\sqrt{891}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{395}}{4}$; в) 3.

2.4. $A(2,4,1)$, $B(-3,-2,4)$, $C(3,5,-2)$, $D(4,2,-3)$; а) ABD;

б) $l=AC$, B және D. **Жауабы**: а) $\sqrt{395}$; б) $\dfrac{\sqrt{5430}}{4}$; в) $\dfrac{25}{3}$.

2.5. $A(-5,-3,-4)$, $B(1,4,6)$, $C(3,2,-2)$, $D(8,-2,4)$; а) ACD;

б) $l=BC$, A және D. **Жауабы**: а) $\dfrac{\sqrt{6137}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{7289}}{2}$; в) $\dfrac{304}{3}$.

2.6. $A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$; а) ABD;

б) $l=BD$, A және C. **Жауабы:** а) $8\sqrt{26}$; б) $10\sqrt{2}$; в) 40.

2.7. $A(-4,6,3)$, $B(3,-5,1)$, $C(2,6,-4)$, $D(2,4,-5)$; а) ACD;

б) $l=AD$, B және C. **Жауабы:** а) $\sqrt{94}$; б) $\sqrt{566}$; в) $\dfrac{70}{3}$.

2.8. $A(7,5,8)$, $B(-4,-5,3)$, $C(2,-3,5)$; $D(5,1,-4)$; а) BCD;

б) $l=DC$, A және D. **Жауабы:** а) $\sqrt{1150}$; б) $\sqrt{2661}$; в) $\frac{202}{3}$.

2.9. $A(3,-2,6)$, $B(-6,-2,3)$, $C(4,6,-7)$; $D(4,6,-7)$; а) ABD;

б) $l=BD$; A және C. **Жауабы**: а) $\sqrt{5040}$; б) $2\sqrt{33}$; в) 52.

2.10. $A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,-1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$; а) BCD;

б)$l=AD$, B және C. **Жауабы:** а) $\frac{\sqrt{1422}}{2}$; б) $\sqrt{504}$; в) 44.

2.11. $A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$; а) ACD; б) $l=BD$,

A және C. **Жауабы**: а) $\frac{\sqrt{6986}}{2}$; б) $\sqrt{1261}$; в) $\frac{202}{3}$.

2.12. $A(7,4,9)$, $B(1,-2,-3)$, $C(-5,-3,0)$, $D(1,-3,4)$; а)ABD; б)$l=AB$,

C және D. **Жауабы:** а) $\sqrt{1179}$; б) 17; в) 50.

2.13. $A(-4.-7.-3)$, $B(-4.-5.7)$, $C(2.-3.3)$, $D(3.2.1)$; а)BCD; б)$l=BC$,

A және D. **Жауабы:** а) $\sqrt{276}$; б) $\sqrt{1393}$; в) $\frac{148}{3}$.

2.14. $A(-4,-5,-3)$, $B(3,1,2)$, $C(5,7,-6)$, $D(6,-1,5)$; а)ACD; б)$l=BC$,

A және D. **Жауабы:** а) $\sqrt{7281}$; б) $\sqrt{2726}$; в) 46.

2.15. $A(5,2,4)$, $B(-3,5,-7)$, $C(1,-5,8)$, $D(9,-3,5)$; а)ABD; б)$l=BD$,

A және C. **Жауабы**: а)$2\sqrt{299}$; б)$\frac{\sqrt{2405}}{2}$; в) $\frac{286}{3}$.

2.16. $A(-6,4,5)$, $B(5,-7,3)$, $C(4,2,-8)$, $D(2,8,-3)$; а)ACD; б)$l=AD$,

B және C. **Жауабы:** а)$2\sqrt{521}$; б)$25\frac{\sqrt{38}}{2}$; в) 150.

2.17. $A(5,3,6)$, $B(-3,-4,4)$, $C(5,-6,8)$, $D(4,0,-3)$; а)BCD;

б)$l=BC$, A и D. **Жауабы:** а)$\sqrt{2342}$; б) $2\sqrt{406}$; в) $\frac{332}{3}$.

2.17. $A(5,3,6)$, $B(-3,-4,4)$, $C(5,-6,8)$, $D(4,0,-3)$; а)BCD; б)$l=BC$,

A және D. **Жауабы:** а) $\sqrt{2342}$; б) $2\sqrt{406}$; в) $\frac{332}{3}$.

2.18. $A(5,-4,4)$, $B(-4,-6,5)$, $C(3,2,-7)$, $D(6,2,-9)$; а)ABD; б)$l=BD$, A және C. **Жауабы:** а) $\sqrt{4140}$; б) $\sqrt{405}$; в) $\frac{86}{3}$.

2.19. $A(-7,-6,-5)$, $B(5,1,-3)$, $C(8,-4,0)$, $D(3,4,-7)$; а)BCD; б)$l=AD$, B және C. **Жауабы:** а) $\frac{\sqrt{158}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2266}}{2}$; в) $\frac{86}{3}$.

2.20. $A(7,-1,-2)$, $B(1,7,8)$, $C(3,7,9)$, $D(-3,-5,2)$; а)ACD; б)$l=BD$, A және C. **Жауабы:** а) $\sqrt{5957}$; б) $\sqrt{1973}$; в) $\frac{124}{3}$.

2.21. $A(5,2,7)$, $B(7,-6,-9)$, $C(-7,-6,3)$, $D(1,-5,2)$; а)ABD; б)$l=AB$, C және D. **Жауабы:** а) $\sqrt{3194}$; б)$3\frac{\sqrt{1990}}{2}$; в) 76.

2.22. $A(-2,-5,-1)$, $B(-6,-7,9)$, $C(4,-5,1)$, $D(2,1,4)$; а)BCD; б)$l=BC$, A және D. **Жауабы: а)** $\sqrt{1802}$; б) $\frac{\sqrt{2142}}{2}$; в) $\frac{226}{3}$.

2.23. $A(-6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2,9)$; а)ACD; б)$l=BC$, A және D. **Жауабы:** а) $\frac{\sqrt{241001}}{2}$; б) $\sqrt{2969}$; в) $\frac{4}{3}$.

2.24. $A(7,4,2)$, $B(-5,3,-9)$, $C(1,-5,3)$, $D(7,-9,1)$; а)ABD; б)$l=BD$, F және C. **Жауабы**: а) $\sqrt{11161}$; б) $\frac{\sqrt{5629}}{2}$; в)186.

2.25. $A(-8,2,7)$, $B(3,-5,9)$, $C(2,4,-6)$, $D(4,6,-5)$; а)ACD; б)$l=AD$, B және С. **Жауабы:** а) $\sqrt{584}$; б) $\frac{\sqrt{9754}}{2}$; в) $\frac{296}{3}$.

2.26. $A(4,3,1)$, $B(2,7,5)$, $C(-4,-2,4)$, $D(2,-3,-5)$; а)ACD; б)$l=AB$, *C* және *D*. **Жауабы:** а) $\sqrt{1666}$; б) $\frac{\sqrt{9746}}{2}$; в) $\frac{80}{3}$.

2.27. *A*(–9,–7,4), *B*(–4,3,–1), *C*(5,–4,2), *D*(3,4,4); а)*BCD*; б)*l*=*CD*, *A* және *B*. **Жауабы:** а) $\sqrt{1346}$; б) $\sqrt{13250}$; в) 120.

2.28. *A*(3,5,3), *B*(–3,2,8), *C*(–3,–2,6), *D*(7,8,–2); а)*ACD*; б)*l*=*BD*, *A* және *C*. **Жауабы:** а) $5\sqrt{11}$; б) $\frac{\sqrt{58}}{2}$; в) $\frac{26}{3}$.

2.29. *A*(4,2,3), *B*(–5,–4,2), *C*(5,7,–4), *D*(6,4,–7); а)*ABD*; б)*l*=*AD*, *B* және *C*. **Жауабы**: а) $\sqrt{3086}$; б) $\sqrt{501}$; в) $\frac{178}{3}$.

2.30. *A*(–4,–2,–3), *B*(2,5,7), *C*(6,3,–1), *D*(6,–4,1); а)*ACD*; б)*l*=*DC*, *A* және *D*. **Жауабы**: а) $\sqrt{1469}$; б) $\sqrt{1964}$; в)116.)

3.

№ 3.1–3.12 есептерде, $\vec{F}$ күші *A* нүктесіне түсірілген.

а) Күштің түсу нүктесі түзу сызықпен қозғала отырып, $B(1,4,0)$ нүктесіне орын ауыстырғандағы $\vec{F}$ күшінің жұмысын;

б) $\vec{F}$ күшінің *B* нүктеге салыстырғандағы моментінің модулін **есептеу керек.**

3.1. $\vec{F}$ =(5,–3,9), *A*=(3,4,–6), *B*=(2,6,5). **Жауабы**: а) 88; б) $\sqrt{6746}$.

3.2. $\vec{F}$ =(–3,1,–9), *A*=(6,–3,5), *B*=(9,5,–7). **Жауабы:** а) 107; б) $\sqrt{8298}$.

3.3. $\vec{F}$ =(2,19,–4), *A*=(5,3,4) *B*=(6,–4,–1). **Жауабы:** а) 111; б) $\sqrt{16254}$.

3.4. $\vec{F}$ =(–4,5,–7), *A*=(4,–2,3), *B*=(7,0,–3). **Жауабы:** а) 40; б) $\sqrt{2810}$.

3.5. $\vec{F}$ =(4,11,–6), A=(3,5,1), B=(4,–2,–3). (**Жауабы:** а) 49; б) $\sqrt{9017}$.

3.6. $\vec{F}$ =(3,–5,7), A=(2,3,–5), B=(0,4,3). **Жауабы:** а) 45; б) $\sqrt{3702}$.

3.7. F=(5,4,11), A=(6,1,–5), B=(4,2,–6). **Жауабы:** а) 17; б) $\sqrt{683}$.

3.8. $\vec{F}$ =(–9,5,7), A=(1,6,–3), B=(4,–3,5). **Жауабы:** а) 16; б) $\sqrt{23614}$.

3.9. $\vec{F}$ =(6,5,–7), A=(7,–6,4), B=(4,9,–6). **Жауабы:** а) 127; б) $\sqrt{20611}$.

3.10. $\vec{F}$ =(–5,4,4), A=(3,7,–5), B=(2,–4,1). **Жауабы:** а) 15; б) $\sqrt{8781}$.

3.11. $\vec{F}$ =(4,7,–3), A=(5,–4,2), B=(8,5,–4). **Жауабы:** а) 93; б) $15\sqrt{3}$.

3.12. $\vec{F}$ =(2,2,9), A=(4,2,–3), B=(2,4,0). **Жауабы:** а) 27; б) 28.

№3.13–3.30 есептерде A нүктесіне түсірілген $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ күштері берілген.

а) A нүктесінің түзу сызық бойымен қозғала отырып, B нүктесіне орын ауыстырғандағы жұмысты есептеу керек.;

б) осы күштерге тең әсерлі күштің B нүктесімен салыстырғандағы моментін есептеу керек.

3.13. $\vec{P}$ =(9,–3,4), $\vec{Q}$ =(5,6,–2), $\vec{R}$ =(–4,–2,7), A=(–5,4,–2), B=(4,6,–5).

Жауабы: а) 65; б) $\sqrt{12883}$.

3.14. $\vec{P}$ =(5,–2,3), $\vec{Q}$ =(4,5,–3), $\vec{R}$ =(–1,3,6), A=(7,1,–5), B=(2,–3,–6).

Жауабы: а) 46; б) $2\sqrt{521}$.

3.15. $\vec{P}$ =(3,–5,4), $\vec{Q}$ =(5,6,–3), $\vec{R}$ =(–7,–1,8), A=(–3,5,9), B=(5,6,–3).

Жауабы: а) 100; б) $\sqrt{7138}$.

3.16. $\vec{P}$ =(–10,6,5), $\vec{Q}$ =(4,–9,7), $\vec{R}$ =(5,3,–3), A=(4,–5,9), B=(4,7,–5).

Жауабы: а)126; б) $2\sqrt{3001}$.

3.17. $\vec{P}$=(5,–3,1), $\vec{Q}$=(4,2,–6), $\vec{R}$=(–5,–3,7), A=(–5,3,7), B=(3,8,–5).

Жауабы: а) –12; б) $2\sqrt{2061}$.

3.18. $\vec{P}$=(–5,8,4), $\vec{Q}$=(6,–7,3), $\vec{R}$=(3,1,–5), A=(2,–4,7), B=(0,7,4).

Жауабы: а) 8; б) $4\sqrt{197}$.

3.19. $\vec{P}$=(7,–5,2), $\vec{Q}$=(3,4,–8), $\vec{R}$=(–2,–4,3), A=(–3,2,0), B=(6,4,–3).

Жауабы: а) 71; б) $\sqrt{4171}$.

3.20. $\vec{P}$=(3,–4,2), $\vec{Q}$=(2,3,–5), $\vec{R}$=(–3,–2,4), A=(5,3,–7), B=(4,–1,–4).

Жауабы: а) 13; б) $\sqrt{195}$.

3.21. $\vec{P}$=(4,–2,–5), $\vec{Q}$=(5,1,–3), $\vec{R}$=(–6,2,5), A=(–3,2,–6), B=(4,5,–3).

Жауабы: а) 15; б) $2\sqrt{262}$.

3.22. $\vec{P}$=(7,3,–4), $\vec{Q}$=(9,–4,2), $\vec{R}$=(–6,1,4), A=(–7,2,5), B=(4,–2,11).

Жауабы: а) 122; б) $\sqrt{3108}$.

3.23. $\vec{P}$=(9,–4,4), $\vec{Q}$=(–4,6,–3), $\vec{R}$=(3,4,2), A=(5,–4,3), B=(4,–5,9).

Жауабы: а) 4; б) $\sqrt{4126}$.

3.24. $\vec{P}$=(6,–4,5), $\vec{Q}$=(–4,7,8), $\vec{R}$=(5,1,–3), A=(–5,–4,2), B=(7,–3,6).

Жауабы: а) 128; б) $\sqrt{10181}$.

3.25. $\vec{P}$=(5,5,–6), $\vec{Q}$=(7,–6,6), $\vec{R}$=(–4,3,4), A=(–9,4,7), B=(8,–1,7).

Жауабы: а) 126; б) $10\sqrt{105}$.

3.26. $\vec{P}$=(7,–6,2), $\vec{Q}$=(–6,2,–1), $\vec{R}$=(1,6,4), A=(3,–6,1), B=(6,–2,7).

Жауабы: а) 44; б) $\sqrt{77}$.

3.27. $\vec{P}$=(4,–2,3), $\vec{Q}$=(–2,5,6), $\vec{R}$=(7,3,–1), A=(–3,–2,5), B=(9,–5,4).

Жауабы: а) 82; б) $\sqrt{2110}$.

3.28. $\vec{P}$ =(7,3,–4), $\vec{Q}$ =(3,–2,2), $\vec{R}$ =(–5,4,3), A=(–5,0,4), B=(4,–3,5).

Жауабы: а) 31; б)$4\sqrt{230}$.

3.29. $\vec{P}$ =(3,–2,4), $\vec{Q}$ =(–4,4,–3), $\vec{R}$ =(3,4,2), A=(1,–4,3), B=(4,0,–2).

Жауабы: а) 15; б) $5\sqrt{89}$.

3.30. $\vec{P}$ =(2,–1,–3), $\vec{Q}$ =(3,2,–1), $\vec{R}$ =(–4,1,3), A=(–1,4,–2), B=(2,3,–1).

Жауабы: а) 0; б) $\sqrt{66}$.

2.2–ҮТ орындау үлгісі

№1. $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k},\ \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ векторлары берілген.

а) $\vec{a},\ \vec{b}$ және $5\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін табу керек.

б) $3\vec{c}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісінің модулін табу керек;

в) $\vec{a}$ мен $3\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін табу керек;

г) $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының коллинеар немесе ортогональ бола ма?

д) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлары компланар бола ма?

▼ **а)** Векторларды аралас көбейтуге қатысты қасиеттерді және § 2.7, (1)-формуланы пайдаланып есептейміз

$$\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right],5\vec{c}\right) = 5\cdot\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 20\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 20\cdot(-5-9-10) = -480;$$

б) Векторлардың векторлық көбейтіндісінің қасиеттері бойынша,

$$3\vec{c}\times\vec{b}=3\cdot\vec{c}\times\vec{b}=3\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 5 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=3(10\vec{i}-6\vec{j}+14\vec{k}),\ \text{ал бұдан}$$

$$\left|3\vec{c}\times\vec{b}\right|=3\cdot\left|\vec{c}\times\vec{b}\right|=3\sqrt{10^2+(-6)^2+14^2}=3\sqrt{332}\quad \text{аламыз.}$$

в) Векторларды скаляр көбейтудің қасиеттерін (§2.5 қараңыз) және § 2.6, $(2')$ формуласы бойынша есептейміз:

$$\vec{a}\cdot 3\vec{b}=3(\vec{a},\vec{b})=3(4\vec{i}+4\vec{k},-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})=12(\vec{i}+\vec{k},-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})=$$
$$=12(1\cdot(-1)+0\cdot 3+1\cdot 2)=12;$$

г) $\vec{a}=(4,0,4)$, $\vec{b}=(-1,3,2)$ векторларының сәйкес координаттары пропорционал емес: $\frac{4}{-1}\neq\frac{0}{3}\neq\frac{4}{2}$ болғандықтан, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар емес. Бұл тұжырымды **а)** п. нәтижесі де көрсетіп тұр: егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болса, онда $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ тең болады да $\left(\vec{a}\times\vec{b},\ 5\vec{c}\right)=0$ шығар еді;

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі: $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot(-1)+0\cdot 3+4\cdot 2\neq 0$ болғандықтан, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары ортогональ емес;

д) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін табамыз:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}4 & 0 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=-20-36-40\neq 0,$$

олай болса, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – векторлары компланар емес.

Бұл сұрақтың жауабын **а)** п. нәтижесінен де алуға болады: $\left(\vec{a}\times\vec{b},\ 5\vec{c}\right)\neq 0$ болғандықтан $\vec{a},\vec{b},5\vec{c}$ векторлары, демек, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары компланар емес. ▲

№2. Пирамида төбелері $A(2,3,4)$, $B(4,7,3)$, $C(1,2,2)$ және $D(-2,0,-1)$ нүктелерінде.

а) ABC жағының ауданын;

б) AB, AC, AD қырларының орталары арқылы өтетін қима ауданын;

в) $ABCD$ пирамида көлемін табу керек.

▼ **а)** $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$ екені белгілі (§2.6, 2-мысал), мұнда

$$\vec{AB} = (2,4,-1),\ \ \vec{AC} = (-1,-1,-2),$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{болғандықтан}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{110};$$

б) AB, AC және AD қырларының орталарын табамыз (§ 2.4, ($5'$) теңдігін қараңыз): $K(3;\ 5;\ 3,5)$, $M(1,5;\ 2,5;\ 3)$, $N(0;1,5;1,5)$. Осы үш нүкте арқылы құралған KMN үшбұрышының ауданы $\overline{KM} = (-1,5;\ -2,5;\ -0,5)$ және $\overline{KN} = (-3;\ -3,5;\ -2)$ векторларына салынған параллелограммның ауданының жартысына тең: $S_{кима} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{KM} \times \vec{KN}\right|$. Мұнда

$$\vec{KM} \times \vec{KN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1,5 & -2,5 & -0,5 \\ -3 & -3,5 & -2 \end{vmatrix} = 3,25\vec{i} - 1,5\vec{j} - 2,25\vec{k} \quad \text{болғандықтан}$$

$$S_{кима} = \frac{1}{2}\sqrt{3,25^2 + 1,5^2 + 2,25^2} = \frac{1}{2}\sqrt{17,875};$$

в) §2.7, (2) формуланы (2–мысалды да қараңыз) пайдаланамыз: $V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}\right|$. Мұнда $\vec{AD}=(-4,-3,-5)$,

$$\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -4 & -3 & -5\end{vmatrix}=11$$ болғандықтан, $V=\frac{11}{6}$. ▲

№3. $\vec{F}(2,3,-5)$ күші $A(1,-2,2)$ нүктесіне түседі.

а) $\vec{F}$ күшінің әсерінен A нүктенің түзу сызықпен қозғала отырып $B(1,4,0)$ нүктесіне орын ауыстырғандағы жұмысын;

б) $\vec{F}$ күшінің B нүктемен салыстырғандағы моментінің модулін табу керек.

▼ **а)** Жұмыс $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$ тең, ал $\vec{S}=\vec{AB}=(0,6,-2)$, олай болса $\vec{F}\cdot\vec{AB}=2\cdot 0+3\cdot 6+(-5)\cdot(-2)=28$. $A=28$;

б) Күш моменті $\vec{M}=\vec{BA}\times\vec{F}$ тең, ал $\overline{BA}=(0,-6,2)$, олай болса

$$\vec{BA}\times F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -6 & 2\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}=24\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}.$$

$$\left|\vec{M}\right|=\sqrt{24^2+4^2+12^2}=4\sqrt{46}.$$ ▲

§ 2.8. n-өлшемді арифметикалық векторлар кеңістігі

2.8.1. Негізгі ұғымдар

Анықтама. *Арифметикалық вектор* деп, реттелген $a_1, a_2, ..., a_n$ сандарының тізбегін айтады және оны $(a_1, a_2, ..., a_n)$ символымен белгілейді. Мұндағы $a_1, a_2, ..., a_n$ сандарын вектордың координаттары деп атайды.

Мысалдар. 1) Түзудегі, жазықтықтағы, кеңістіктегі бізге белгілі геометриялық векторды (бағытталған кесіндіні) сәйкес бір, екі, үш координатты арифметикалық вектор деп қарастыруға болады;

2) n-ші ретті анықтауыштың әрбір қатары n-координатты арифметикалық вектор;

3) $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ сызықтық теңдеуіндегі белгісіздердің коэффициенттері n-координатты арифметикалық вектор: $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Бұдан кейін «арифметикалық векторды» тек «вектор» деп атаймыз және оларды қою әріптермен: **a**, **b**, … немесе $\vec{a}, \vec{b}, ...$ арқылы белгілейміз.

Анықтама. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ және $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)$ векторларының координаттарының сандары бірдей ($n = m$) және сәйкес координаттары өзара тең болса ($a_i = b_i,\ i = 1,2,...,n$), олар ***тең векторлар*** деп аталады да **a = b** символымен белгіленеді.

Анықтама. Координаттарының саны өзара тең **a** = $= (a_1, a_2, ..., a_n)$ және **b** = $(b_1, b_2, ..., b_n)$ векторларының **қосындысы** деп, келесі теңдікпен анықталған $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ векторын айтады: **a** + **b** = = $(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ ...,\ a_n + b_n)$.

Анықтама. **a** = $(a_1, a_2, ..., a_n)$ векторы мен k санының көбейтіндісі деп, келесі теңдікпен анықталған $k \cdot \mathbf{a}$ векторын айтады: $k\,\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ..., ka_n)$.

Барлық координаттары нөлге тең вектор **нөл вектор** деп аталады және $\mathbf{0}$ арқылы белгіленеді: $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

$(-1)\mathbf{a}$ векторын **a** векторына **қарама-қарсы вектор** деп атайды және оны $-\mathbf{a}$ арқылы белгілейді: $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$.

Жоғарыда көрсетілген екі амалға қатысты келесі теңдіктердің орындалатынын тексеру қиын емес:

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$; 2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;

3) $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$; 4) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$;

5) $k(l\mathbf{a})=(kl)\mathbf{a}$; 6) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;

7) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$; $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$; 8) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Анықтама. Векторларды қосу мен векторларды санға көбейту амалдары жоғарыда көрсетілген тәсілмен анықталған, координаттар саны n тең арифметикалық векторлар жиынын ***n*-өлшемді арифметикалық векторлар кеңістігі** деп атайды және оны R^n арқылы белгілейді.

Бұдан кейін аталған кеңістікті ***n*-өлшемді векторлар кеңістігі** немесе R^n **кеңістігі** деп атайтын боламыз. R^1, R^2, R^3 кеңістіктерінің геометриялық мағыналары: R^1 – түзудегі векторлар жиыны; R^2 – жазықтықтағы векторлар жиыны; R^3 – кеңістіктегі векторлар жиыны.

2.8.2. Сызықты тәуелді және сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі

Келесі m векторлардан құралған жүйені қарастырамыз

$$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m. \tag{1}$$

Анықтама. *Егер*

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{a}_m = \vec{0} \tag{2}$$

теңдігі тек $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ *болса, және тек сонда ғана орындалса, онда* (1) *векторлар жүйесі –* ***сызықты тәуелсіз*** *деп аталады.*

Ал, егер (2) теңдік орындалатындай, барлығы бірдей бір мезгілде нөл емес (яғни $\alpha^2{}_1 + \alpha^2{}_2 + \ldots + \alpha^2{}_m \neq 0$ теңсіздігі орындалатындай) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ сандары табылса, онда (1) *векторлар жүйесі –* ***сызықты тәуелді*** деп аталады.

Теорема (*векторлар жүйесінің сызықты тәуелділігінің критерийі*) Жалғыз вектордан тұратын жүйе осы вектор нөл вектор болса, және тек сонда ғана ***сызықты тәуелді болады***. Бірнеше вектордан тұратын жүйе осы жүйедегі ең болмағанда бір вектор қалған векторлардың сызықты комбинациясы болатын болса, және тек сонда ғана ***сызықты тәуелді*** болады.

▼ $\vec{a}_1$ векторы ***сызықты тәуелді*** жүйе болсын. Онда анықтама бойынша, $\alpha_1 \neq 0$ және $\alpha_1\vec{a}_1 = \vec{0}$ теңдігі орындалатындықтан $\vec{a}_1 = \vec{0}$ аламыз. Керісінше, егер $\vec{a}_1 = \vec{0}$ болса, онда $\alpha_1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\alpha_1 \neq 0$ орындалып, $\vec{a}_1 = \vec{0}$ векторы ***сызықты тәуелді*** жүйе болады.

Теореманың екінші бөлігін дәлелдейік. Егер $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ $(m > 1)$ – ***сызықты тәуелді*** векторлар жүйесі болса, онда анықтама бойынша, $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m = \vec{0}$ (*) теңдігі орындалатындай барлығы бірдей бір мезгілде нөл емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ сандары табылады. Анықтылық үшін, бұл теңдік $\alpha_k \neq 0$ болатын $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ..., \alpha_m$ сандары үшін орындалады деп алайық. Онда, (*) теңдігінің екі жағына $-\alpha_k\vec{a}_k$ векторын қосып, нәтижені $-\dfrac{1}{\alpha_k}$ санына көбейтсек,

$$\vec{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{a}_2 - ... - \frac{\alpha_m}{\alpha_k}\vec{a}_m$$

аламыз. Яғни егер ***векторлар жүйесі сызықты тәуелді болса, онда олардың бірі қалған векторлардың сызықты комбинациясы*** болады екен. Керісінше, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ $(m > 1)$ векторлар жүйесінің бірі қалған векторлардың сызықты комбинациясы болсын: $\vec{a}_k = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + ... + c_m\vec{a}_m$ (мұндағы $c_1, c_2, ..., c_m$ сандарының кейбіреулері немесе барлығы да нөлге тең болуы мүмкін). Бұл теңдіктің екі жағына $-\vec{a}_k$ векторын қоссақ, $(-1)\vec{a}_k + c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + ... + c_m\vec{a}_m = \vec{0}$ теңдігін аламыз. Мұндағы $\vec{a}_k$ векторының коэффициенті $-1 \neq 0$. Олай болса анықтама бойынша, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторлары – ***сызықты тәуелд***і жүйе. ▲

Мысал. $\vec{a}_1=(2,\ 1,\ 0,\ 4),\ \vec{a}_2=(1,\ -2,\ 3,\ 2),\ \vec{a}_3=(-1,\ -8,\ 9,-2)$ векторлары сызықты тәуелді жүйе бола ма? Егер болса, онда оларды байланыстыратын қатысты табу керек.

▼ Анықтамаға сәйкес, $x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+x_3\vec{a}_3=\vec{0}$ теңдігі орындалатындай, ең болмағанда, біреуі нөлге тең емес x_1,x_2,x_3 сандары бар болса, берілген векторлар жүйесі – сызықты тәуелді. Векторлардың координаттарын теңдікке қойып, амалдарды орындаймыз.

$$(2x_1,\ x_1,0,\ 4x_1)+(x_2,-2x_2,3x_2,2x_2)+\ (-x_3,-8x_3,9x_3,-2x_3)=$$
$$=(0,0,0,0),$$

$$(2x_1+x_2-x_3,\ x_1-2x_2-8x_3,\ 3x_2+9x_3,\ 4x_1+\ 2x_2-2x_3)=(0,0,0,0)\ .$$

Соңғы теңдікке векторлардың теңдігінің анықтамасын қолданамыз және алынған сызықтық теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешеміз:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0,\\ x_1-2x_2-8x_3=0,\\ 3x_2+9x_3=0,\\ 4x_1+\ 2x_2-2x_3=0,\end{cases}\qquad \begin{cases} x_1-2x_2-8x_3=0,\\ 2x_1+x_2-x_3=0,\\ x_2+3x_3=0,\end{cases}\qquad \begin{cases} x_1-2x_2-8x_3=0,\\ x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

Соңғы жүйеде базистік белгісіздер үшін x_1,x_2, ал еркін айнымал үшін x_3 алуға болады (неге?). Мысалы, егер $x_3=1$ деп алсақ, онда $x_1=2,\ \ x_2=-3$ аламыз. Ендеше, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ векторлары сызықты тәуелді және олар келесі тәуелділікте байланысқан $2\vec{a}_1-3\vec{a}_2+\vec{a}_3=\vec{0}$. ▲

2.8.3. Сызықты тәуелді векторлардың қасиеттері

R^n кеңістігінде $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ векторлар жүйесі берілсін.

1°. Егер векторлар жүйесінің арасында нөл вектор бар болса: $\vec{a}_1,...,\vec{a}_{k-1},\ \vec{0},\ \vec{a}_{k+1},...,\vec{a}_m$, онда жүйе сызықты тәуелді болады.

▼ Берілген векторлар жүйесі үшін $0\vec{a}_1 + ... + 0\vec{a}_{k-1} + c\cdot\vec{0} + 0\vec{a}_{k+1} + ...0\vec{a}_m = \vec{0}$ теңдігі орындалатын барлығы бірдей нөл емес $0,...,\underset{k}{c},...,0,\ \ c \neq 0$ сандары бар. ▲

2°. Егер векторлар жүйесінің қандай да бір бөлігі сызықты тәуелді болса, онда барлық жүйе де сызықты тәуелді.

▼ Шынында да, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ жүйесінің, айталық, алғашқы k векторы ($k < m$) сызықты тәуелді болсын, яғни

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0} \tag{1}$$

теңдігі орындалатындай барлығы бірдей бір мезгілде нөл емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ сандары табылсын. Онда (1) теңдіктен, $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k + 0\cdot\vec{a}_{k+1} + ... + 0\cdot\vec{a}_m = \vec{0}$ теңдігі орындалатындай барлығы бірдей нөл емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, 0, ..., 0$ сандары бар болғандықтан $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ жүйесі сызықты тәуелді болады. ▲

Салдар. ***Егер векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз болса, онда жүйенің кез келген бөлігі де сызықты тәуелсіз болады.***

3°. Егер $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ жүйесі ***сызықты тәуелсіз***, бірақ жүйені тағы бір $\vec{a}$ векторымен толықтырып алынған $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m, \vec{a}$ жүйесі ***сызықты тәуелді болса***, онда $\vec{a}$ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторларының сызықты комбинациясы болады.

▼ Шынында да, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m, \vec{a}$ жүйесінің сызықты тәуелді болуы,

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m + c\cdot\vec{a} = \vec{0} \tag{2}$$

теңдігі орындалатындай барлығы бірдей бір мезгілде нөл емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, c$ сандары табылады деген сөз. Егер мұндағы $c = 0$ болса, онда $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ сандарының барлығы бірдей бір мезгілде нөл емес және $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m = \vec{0}$ теңдігі орындалар еді де, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ – ***сызықты тәуелді*** жүйе болар еді (қарама қайшылық). Ендеше $c \neq 0$, ал бұдан және (2) теңдіктен, $\vec{a}$ векторын $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ векторлары арқылы өрнектеуге болатыны шығады. ▲

2.8.4. R^n кеңістігіндегі базистер

Анықтама. R^n кеңістігіндегі кез келген ***векторды*** сызықты комбинация түрінде өрнектейтін кеңістіктің ***сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі*** R^n **кеңістігінің базисі** деп аталады.

Анықтамадан келесі сұрақтар туындайды:

R^n кеңістігінде базис бола алатын сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі табылады ма? R^n кеңістігіндегі базистің құрамында қанша вектор болады? R^n кеңістігінде қанша базис бар?

Енді осы сұрақтарға жауап іздейміз.

1-тұжырым. R^n кеңістігінде n вектордан тұратын базис бар.

▼ R^n кеңістігінің базисі ретінде, мысалы, ***бірлік векторлар*** деп аталатын, келесі векторлар жүйесін алуға болады

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \ \vec{\varepsilon}_2 = (0,\ 1,\ \ldots,\ 0),\ \ \ldots,\ \vec{\varepsilon}_n = (0,\ 0,\ \ldots.,\ 1). \qquad (1)$$

Шынында да, $k_1\vec{\varepsilon}_1 + k_2\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + k_n\vec{\varepsilon}_n = \vec{0}$ теңдеуін $k_i,\ \ i = 1,2,\ldots,n$

белгісіздеріне қатысты шешсек:

$$k_1(1,\ 0,\ \ldots,\ 0) + k_2(0,\ 1,\ \ldots,\ 0) + \ldots + k_n(0,\ 0,\ \ldots.,\ 1) = (0,0,\ldots,0)$$

немесе $(k_1, k_2,\ \ldots,\ k_n) = (0,0,\ldots,0)$, ал бұдан $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ аламыз. Демек (1) – сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі.

Енді R^n кеңістігіндегі кез келген $\mathbf{a} = (a_1, a_2,\ \ldots, a_n)$ векторы (1) жүйенің сызықты комбинациясы екенін көрсетсек болғаны:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2,\ \ldots, a_n) = (a_1, 0,\ \ldots, 0) + (0, a_2,\ \ldots, 0) + \ldots + (0, 0,\ \ldots, a_n) =$$

$$= a_1(1,0,\ \ldots,0) + a_2(0,1,\ \ldots,0) + \ldots + a_n(0,0,\ \ldots,1) =$$

$$= a_1\ \vec{\varepsilon}_1 + a_2\ \vec{\varepsilon}_2 + \ldots + a_n\ \vec{\varepsilon}_n. \qquad ▲$$

Сонымен жоғарыдағы сұрақтардың алғашқысына оң жауап алдық.

2-тұжырым. Егер R^n кеңістігінде ***базис құрайтын*** векторлар-дың саны i болса**,** онда саны $i+1$ вектордан тұратын ***кез келген*** жүйе ***сызықты тәуелді*** болады.

▼ Тұжырымды $i = 2$ үшін дәлелдейік ($i = 3,4,\ \ldots$ үшін де осы сияқты пайымдаулар қолданылады). Сонымен, R^n кеңістігінде **a**, **b** векторлары базис болса, онда R^n кеңістігіндегі кез келген $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ үш вектор сызықты тәуелді болатынын, яғни

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 = \mathbf{0} \qquad (2)$$

теңдігі орындалатындай барлығы бірдей нөл емес x_1, x_2, x_3 сандары табылатынын көрсетейік. Ол үшін осы үш векторды **a**, **b** базисі бойынша жіктейік:

$$\mathbf{c}_1 = \alpha_1 \cdot \mathbf{a} + \beta_1 \cdot \mathbf{b}, \qquad \mathbf{c}_2 = \alpha_2 \cdot \mathbf{a} + \beta_2 \cdot \mathbf{b}, \qquad \mathbf{c}_3 = \alpha_3 \cdot \mathbf{a} + \beta_3 \cdot \mathbf{b}. \quad (3)$$

Енді осы үш теңдіктің оң жағындағы өрнектерді (2) теңдіктегі $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ векторлардың орнына қойып келесі амалдарды орындаймыз

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 =$$

$$= x_1(\alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b}) + x_2(\alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}) + x_3(\alpha_3\mathbf{a} + \beta_3\mathbf{b}) =$$

$$= (x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3)\mathbf{a} + (x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3)\mathbf{b} = \mathbf{0}. \qquad (4)$$

Бұдан, **a**, **b** – сызықты тәуелсіз векторлар болғандықтан, келесі теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= 0, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 &= 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Егер мұнда $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ болса, онда $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = t$ қатыстары арқылы (3) теңдіктердің алғашқы екеуінен $\mathbf{c}_1 = t\mathbf{c}_2$, яғни $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ векторларының сызықты тәуелді, демек **2.8.3. п. 2°** бойынша $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ үш вектордың да сызықты тәуелділігін алар едік. Ал егер $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$ болса, онда $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$ болғандықтан жүйенің бір параметрге тәуелді ақырсыз шешімдері бар болады (§1.6 қараңыз), яғни (5) жүйенің x_1, x_2, x_3 белгісіздеріне қатысты тривиал емес шешімі бар. Ендеше (5), (4), (2) теңдіктерден бұл жағдайда да $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ үш вектор сызықты тәуелді болатынын көреміз. ▲

3-тұжырым. R^n кеңістігінің базисінің құрамындағы векторлар саны n-ге тең.

▼ Саны n-нен артық $\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n, ..., \vec{c}_m$ векторлар жүйесі R^n кеңістігінің базисі бола алмайды. Өйткені, 1-тұжырымға сәйкес, R^n кеңістігінде саны n вектордан тұратын $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_n$ базисі бар болғандықтан, 2-тұжырым бойынша, $n+1$ вектордан тұратын ***кез келген*** жүйе, демек, $\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n, \vec{c}_{n+1}$ жүйесі де - сызықты тәуелді. Олай болса, **2.8.3.** п. 2° қасиет бойынша, $\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n, \vec{c}_{n+1}, ..., \vec{c}_m$ векторлары – ***сызықты тәуелді*** жүйе, яғни R^n кеңістігінде векторлар саны n-нен артық болатын базис жоқ.

Енді R^n кеңістігінде векторлар саны n-нен кем болатын $\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_i$ $(i < n)$ базисі бар деп ұйғарайық. Онда, 2 тұжырым бойынша, саны $i+1$ вектордан тұратын ***кез келген*** жүйе, демек, $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_{i+1}$, $i+1 \le n$ жүйесі де ***сызықты тәуелді*** болар еді де, **2.8.3 п. 2°** бойынша, $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_i, ..., \vec{\varepsilon}_n$ сызықты тәуелді болып, бұл жүйе R^n кеңістігінің базисі болмас еді. Бірақ бұл 1-тұжырымға қайшы. Олай болса, R^n кеңістігінде құрамындағы векторлар саны n-нен кіші базис те жоқ. 3-тұжырым дәлелденді. ▲

Назар аударыңыз! R^n кеңістігінде саны n-нен артық векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз бола алмайтынын көрдік, бірақ саны n-нен артық емес векторлардан құралған сызықты тәуелсіз жүйелер табылады. Мысалы, R^4 кеңістігінде $\vec{a}_1 = (2,\ 1,\ 0,\ 4)$, $\vec{a}_2 = (0,\ -2,\ 3,\ 2)$, $\vec{a}_3 = (0,\ 0,\ 9, -2)$ векторлары сызықты тәуелсіз жүйені құрайды (көз жеткізіңіз).

Негізгі теорема. R^n кеңістігіндегі n вектордан құралған ***кез келген*** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ ***сызықты тәуелсіз жүйе*** - R^n кеңістігінің ***базисі,*** яғни R^n кеңістігінің әрбір **a** векторы үшін

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \ldots + k_n\mathbf{e}_n \tag{6}$$

теңдігі орындалады, және ол теңдік жалғыз ғана түрде орындалады.

▼ R^n кеңістігінің кез келген **a** векторы берілсін. 3-тұжырым бойынша, R^n кеңістігінің базисі дәл n-вектордан тұратындықтан, 2-

тұжырым бойынша, саны $n+1$ вектордан құралған кез келген жүйе – сызықты тәуелді. Олай болса, сызықты тәуелсіз $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ векторлар жүйесін $\mathbf{a}$ векторымен толықтырып алынған $n+1$ вектордан тұратын $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$, $\mathbf{a}$ жүйесі де - сызықты тәуелді болады да, **2.8.3.** п. 3° қасиет бойынша, $\mathbf{a}$ векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ векторларының сызықты комбинациясы болады: $\mathbf{a} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \ldots + k_n\mathbf{e}_n$. Демек, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ векторлар жүйесі - R^n кеңістігінің базисі. Теореманың екінші жартысын дәлелдеу үшін қарсы жориық: $\mathbf{a}$ векторының $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ базисі арқылы (6) жіктелуден басқа келесі түрі де бар болсын:

$$\mathbf{a} = k_1'\mathbf{e}_1 + k_2'\mathbf{e}_2 + ... + k_n'\mathbf{e}_n . \tag{7}$$

(6) теңдіктен (7) теңдікті мүшелеп шегереміз:

$$(k_1 - k_1')\mathbf{e}_1 + (k_2 - k_2')\mathbf{e}_2 + ... + (k_n - k_n')\mathbf{e}_n = \mathbf{0} .$$

Мұндағы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ векторлары сызықты тәуелсіз жүйе болғандықтан, соңғы теңдік тек $k_1 - k_1' = 0,\ k_2 - k_2' = 0, ...,\ k_n - k_n' = 0$, яғни $k_1 = k_1',\ k_2 = k_2',\ ...,\ k_n = k_n'$ болса ғана орындалады. Олай болса, $\mathbf{a}$ векторының $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ базисі арқылы (6) жіктелуден басқа түрі жоқ. ▲

R^n кеңістігінің базисінің құрамындағы векторлар саны осы ***кеңістіктің өлшемі*** деп аталады.

Назар аударыңыз! R^n кеңістігінің өлшемі осы кеңістіктегі сызықты тәуелсіз векторлардың ең үлкен санына тең!

§ 2.9. Матрица рангісі мен сызықты тәуелсіз векторлардың байланысы

Өлшемі $m \times n$ болатын $\mathbf{A}$ матрицасы берілсін:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$ Осы $\mathbf{A}$ матрицасының әрбір жолын

n координатты арифметикалық вектор (яғни, R^n кеңістігінің векторы), ал әрбір бағанын m координатты арифметикалық вектор (яғни, R^m кеңістігінің векторы) ретінде қарастыруға болады. Матрицаның жолдарын $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, …, $\mathbf{A}_m$ векторлары арқылы белгілейік:

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11},\ a_{12},\ ....\ ,\ a_{1n}),$$
$$\mathbf{A}_2 = (a_{21},\ a_{22},\ ....\ ,\ a_{2n}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{A}_m = (a_{m1},\ a_{m2},\ ....\ ,\ a_{mn}).$$

Дәлелдеусіз келесі теореманы келтіреміз.

Теорема. **A** матрицасының $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, …, $\mathbf{A}_m$ жолдар жүйесіндегі сызықты тәуелсіз векторлардың ең үлкен саны матрица рангіне тең.

Олай болса, егер матрицада r *сызықты тәуелсіз* жол табылып, кез келген $(r+1)$ жол *сызықты тәуелді* болса, онда матрица рангісі r санына тең.

Теоремадағы матрицаның жолдарының орнына оның бағандарын алуға болатынын келесі 1-тұжырымнан көреміз.

1-Тұжырым. Матрицаның ***сызықты тәуелсіз жолдарының*** ең үлкен саны мен ***сызықты тәуелсіз бағандарының*** ең үлкен саны өзара тең.

▼ **A** матрицасын транспонирлеуден алынған $\mathbf{A}^T$ матрицасын қарастырамыз:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1-тұжырымның дұрыстығына көз жеткізу үшін $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}^T)$ теңдігінің дұрыстығын тексерсе болғаны. Шынында да, матрицаны транспонирлеу, оның нөлге тең емес минорларының ең жоғары ретін өзгерте алмайды, өйткені берілген анықтауыш пен оны транспонирлеп алынған анықтауыштың мәндері өзара тең (1.1.2 п.). Ал анықтама бойынша (§ 1.4 қараңыз) матрица рангісі дегеніміз – оның нөлге тең емес минорларының ең жоғарғы реті. Олай болса $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}^T)$ теңдігі дұрыс. Бұдан жоғарыдағы теоремаға сүйеніп, 1-тұжырымның дұрыс екенін көреміз. ▲

Осы айтылғандардан келесі анықтамаға келеміз.

Анықтама. ***Матрицаның рангісі деп, оның сызықты тәуелсіз жолдарының (бағандарының) ең үлкен санын айтады.***

Салдар. Трапеция тәріздес матрицадағы жолдар жүйесі – сызықты тәуелсіз.

▼ Шынында да, трапеция тәріздес матрицаның рангі жолдар санына тең (§ 1.4 қараңыз). ▲

2-Тұжырым. ***Анықтауыш нөлге тең емес болса, тек сонда ғана оның жолдары (бағандары) сызықты тәуелсіз болады.***

▼ Егер қандай да бір n-ші ретті матрицаның анықтауышы нөл емес болса, онда оның рангі, демек, матрицаның сызықты тәуелсіз жолдарының ең үлкен саны да, n-ге тең болады. Керісінше, егер n-ші ретті матрицаның *барлық* жолдары сызықты тәуелсіз, яғни рангісі n-ге тең болса, онда матрицаның анықтауышы нөл емес. ▲

Егер $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ – сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі болса, онда 2-Тұжырым бойынша, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Бұл теңсіздіктің со жағындағы анықтауыш $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ векторларының аралас көбейтіндісі болғандықтан, бұл векторлар компланар емес деген сөз. Және керісінше, егер үш вектор компланар емес болса, онда ол үшеуінің сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі болатынын көреміз. Сонымен, R^3 кеңістігіндегі ***«үш вектордың сызықты тәуелсіздігі»*** мен ***«үш вектордың компланар еместігі» - пара пар ұғымдар.*** Бұл, R^3 кеңістігінің базисін осы екі түсініктің кез келгенін пайдаланып анықтауға болады деген сөз (2.8.4. п. негізгі теорема мен § 2.3 анықтаманы қараңыз).

Осы сияқты, егер $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ – сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі болса, онда 2-Тұжырым бойынша, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, немесе $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ал бұл $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ векторларының коллинеар емес екенін көрсетеді. Керісінше, егер $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ векторлары коллинеар емес болса, онда олар сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі болатынын көреміз. Сонымен, R^2 кеңістігіндегі ***«екі вектордың сызықты тәуелсіздігі»*** мен ***«екі вектордың коллинеар еместігі» – пара пар ұғымдар.*** Бұл, R^2 кеңістігінің базисін осы екі түсініктің кез келгенін пайдаланып анықтауға болады деген сөз (2.8.4. п. негізгі теорема мен § 2.3 анықтаманы қараңыз).

Осы сияқты, R^1 кеңістігінде ***«бір вектордың сызықты тәуелсіздігі»*** мен ***«нөл емес вектор» – пара пар ұғымдар.*** Яғни R^1 кеңістігінің базисін осы екі түсініктің кез келгенін пайдаланып анықтауға болады деген сөз (2.8.4. п. негізгі теорема мен § 2.3 анықтаманы қараңыз).

Салдар. *Егер анықтауыш нөлге тең болса, тек сонда ғана оның жолдары (бағандары) сызықты тәуелді болады.*

Анықтама. Матрицаның $A_1, A_2, ..., A_k$ қатарының **сызықты комбинациясы** деп $C_1A_1 + C_2A_2 + ... + C_kA_k$ қосындысын айтады (C_i, $i = 1, 2, ..., k$ – қандай да бір сандар).

Назар аударыңыз! Егер анықтауыштың қандай да бір қатары оған параллель қатарлардың сызықты комбинациясынан құралған болса, онда анықтауыш нөлге тең.

Базистік минор туралы

Теорема. Матрицаның кез келген жолы (бағаны) – оның базистік жолдарының (бағандарының) сызықты комбинациясы.

▼ Базистік жолдар саны матрица рангіне (сызықты тәуелсіз жолдардың ең үлкен санына) тең болғандықтан, базистік жолдарға тіркелген (қосылған) кез келген жол 2.8.3. п. 3°-тұжырым бойынша, осы базистік жолдардың сызықты комбинациясы болады. ▲

Мысалы, R^4 кеңістігіндегі $\mathbf{a}_1 = (1,4,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (2,3,-1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,9,4,2)$, $\mathbf{a}_4 = (1,-6,-5,-1)$ векторлары берілсін. Осы векторларды жолдар етіп матрица құрайық: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Алынған матрицаның рангісі

2-ге тең (көз жеткізіңіз). Базистік минордың біреуін алайық, мысалы, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$ Бұл анықтауыштың элементтері орналасқан **A** матрицасының бірінші және екінші жолдары – базистік жолдар ($\mathbf{a}_1$ және $\mathbf{a}_2$ – сызықты тәуелсіз векторлар). Олай болса, $\mathbf{a}_3$ пен $\mathbf{a}_4$ векторлары $\mathbf{a}_1$ және $\mathbf{a}_2$ векторларының сызықты комбинациясы болады. Енді осы комбинацияларды алу жолын көрсетейік. Ол үшін келесі теңдікті жазамыз

$$\mathbf{a}_3 = x \cdot \mathbf{a}_1 + y \cdot \mathbf{a}_2. \qquad (*)$$

Мұндағы x, y табу үшін алынған теңдікті координаттары арқылы

жазып алып, векторларға жасалатын амалдарды қолданып есептейміз:

$$(1,\ 9,\ 4,\ 2) = x(1,\ 4,\ 1,\ 1) + y(2,\ 3, -1,\ 1),$$

$$(1,\ 9,\ 4,\ 2) = (x + 2y,\ \ 4x + 3y,\ \ x - y,\ \ x + y).$$

Бұдан, векторлардың теңдігінің анықтамасын пайдаланып, келесі екі белгісізі бар төрт теңдеулер жүйесін аламыз: $x + 2y = 1$, $4x + 3y = 9$, $x - y = 4$, $x + y = 2$. Мұндағы алғашқы екі теңдеудің коэффициентерінен құралған анықтауыш, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ анықтауышынан транспонирлеу арқылы алынғандықтан, ол екі теңдеу жүйесінің жалғыз шешімі бар. Ол жүйені шеше отырып, $x = 3$, $y = -1$ аламыз. Енді (*) теңдігіне табылған екі мәнді қоямыз: $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Осындай тәсілмен $\mathbf{a}_4 = -3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$ алуға болады. Сонымен бірге, $\mathbf{a}_1 = 1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2 = 0 \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_2$.

§ 2.10. Сызықтық кеңістік

Біз $(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ түріндегі арифметикалық векторлар жиынын (Rn кеңістігін) қарастырдық. Бұл жиында ***векторларды қосу, векторды санға көбейту амалдары*** анықталып, осы екі амалға қатысты **2.10.1.** п. көрсетілген сегіз теңдік орындалатын еді. Аталған сегіз теңдік орындалатындай ***векторларды қосу, векторды санға көбейту амалдары*** анықталатын басқа да көптеген жиындар кездеседі. Мысалы, екі өлшемді

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ түріндегі барлық матрицалар жиынын алайық. Матрицаларды қосу, матрицаны санға көбейту амалдарын § 1.2 көрсетілгендей етіп анықтасақ, осы екі амалға қатысты **2.10.1.** п. көрсетілген сегіз теңдіктің орындалатынын тексеру қиын емес. Осылай етіп алынған екі өлшемді матрицалар жиыны 2×2 ***өлшемді матрицалар кеңістігі*** деп аталады. Әрине өлшемдері 3×3, 4×4 т.с.с. немесе $m\times n,\ m\neq n$ болатын матрицалар кеңістіктерін немесе құрылысы басқа (мысалы, функциялар жиынынан тұратын) кеңістіктерді анықтауға болады. Мұндай кеңістіктердің барлығы ***сызықтық кеңістікке*** жатады. Енді осы сызықтық кеңістігінің анақтамасын келтірейік.

Анықтама. Егер $x,\ y,\ z,\ \ldots$ элементтерінен құралған L жиыны үшін:

1) L жиынының кез келген x, y элементтеріне олардың ***қосындысы*** деп аталатын L жиынының z элементін (оны $x+y$ арқылы белгілейді) сәйкес қоятын ереже бар болса;

2) L жиынының кез келген x элементі мен кез келген λ санына олардың ***көбейтіндісі*** деп аталатын L жиынының λx элементін сәйкес қоятын ереже бар болса;

3) осы екі ереженің екеуі де келесі сегіз аксиоманы қанағаттандырса:

I. L жиынының кез келген x, y элементтері үшін $x+y=y+x$ (орын ауыстырымдылық қасиет);

II. L жиынының кез келген x, y, z элементтері үшін $(x+y)+z=x+(y+z)$ (терімділік қасиет);

III. L жиынының кез келген x элементі үшін $x+\theta=x$ теңдігі орындалатындай θ нөл элементі бар болса;

IV. L жиынының кез келген x элементі үшін $x+\bar{x}=\theta$ теңдігін қанағаттандыратындай қарама-қарсы элемент $\bar{x}$ бар болса;

V. L жиынының кез келген x элементі үшін $1\cdot x=x$ (1 көбейт-кішінің ерекше қасиеті);

VI. *L* жиынының кез келген *x* элементі және кез келген λ, μ сандары үшін $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (сандық көбейткіштерге қатысты терімділік қасиет);

VII. кез келген λ, μ сандары және *L* жиынының кез келген x элементі үшін $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (сандық көбейткіштердің қосындысына қатысты үлестіру қасиеті);

VIII. кез келген λ саны және *L* жиынының кез келген x, y элементтері үшін $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (элементтердің қосындысына қатысты үлестіру қасиеті) орындалса, онда *L* жиыны ***сызықтық (***немесе ***векторлық) кеңістік*** деп аталады.

Сызықтық кеңістіктерді зерттейтін математиканың бөлімін ***сызықтық алгебра*** деп атайды.

L сызықтық кеңістігінде де *Rn* кеңістігінде көрсетілгендей, бірқатар түсініктерді енгізуге болады. Бірақ мынадай ерекшелікті атап өтеміз: *Rn* кеңістігінің ақырсыз көп базисі болатынын біз жоғарыда көрдік, ал сызықтық кеңістіктердің кез келгені үшін, базис табыла бермейді: ***бірде-бір базисі болмайтын сызықтық кеңістіктер бар***. Осындай кеңістіктерді алып тастау үшін, сызықтық кеңістік анықтамасындағы I, II, III шартқа тағы бір келесі шартты қосады:

IX. *L* кеңістігінде ең болмағанда бір базис бар.

Тақырыпқа арналған сұрақтар мен тапсырмалар

1.Келесі теңдіктерді дәлелдеңіздер:

1) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$; 2) $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$; 3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$; 4) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$;
5) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

2. Сызықты тәуелді және сызықты тәуелсіз векторлар жүйесінің анықтамасын келтіріңіз.

3. Сызықты тәуелді векторлардың қасиеттері.

4.Егер берілген векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз болса, онда ол жүйенің кез келген бөлігі де сызықты тәуелсіз болатынын көрсетіңіз.

5. R^n кеңістігінің базисі деген не?

6. R^n кеңістігіндегі базистің құрамындағы векторлар саны i тең болса, онда саны $i+1$ вектордан тұратын сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі табылады ма?

7. Матрицаның рангісінің анықтамасын оның сызықты тәуелсіз қатарлары арқылы беріңіз.

8. Трапеция тәріздес матрицадағы жолдар сызықты тәуелсіз векторлар болатынына көз жеткізіңіз.

9. Матрицаның кез келген жолын (бағанын) оның базистік жолдарының (базистік бағандарының) сызықты комбинациясы түрінде өрнектеуге болатынын дәлелдеңіз.

Тақырыпқа арналған есептер:

№1. Егер $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$ болса, онда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ векторлары сызықты тәуелсіз жүйе болады ма? Жауабыңызды негіздеңіз.

№2. **а)**Келесі векторлар жүйесінің сызықты тәуелді немесе сызықты тәуелсіз екенін анықтаңыз. **ә)** Сызықты тәуелді векторлар арасындағы байланысты табыңыз.

1) $\vec{a}_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 2),\ \vec{a}_2 = (1,\ -2,\ 3,\ 2),\ \vec{a}_3 = (3,\ -8,\ 9, -2);$

2) $\vec{a}_1 = (1,\ -1,\ 0,\ -2),\ \vec{a}_2 = (2,\ -2,\ 3,\ 2),\ \vec{a}_3 = (0,\ 7,\ 9, -2);$

3) $\vec{a}_1 = (1,\ 1,\ 0),\ \vec{a}_2 = (1,\ -2,\ 3),\ \vec{a}_3 = (3,\ -2,\ 1),\ \vec{a}_4 = (2, 4, -1).$

№3. Келесі векторлар жүйесі R^4 кеңістігінің базисі бола алады ма? Жауабыңызды негіздеңіз.

а) $\vec{a}_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 2),\ \vec{a}_2 = (1,\ -2,\ 3,\ 2),\ \vec{a}_3 = (3,\ -8,\ 9, -2)$
$\vec{a}_4 = (4,\ -5,\ 3, -2);$

ә) $\vec{a}_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 2),\ \vec{a}_2 = (1,\ -2,\ 3,\ 2),\ \vec{a}_3 = (0,\ 0,\ 9, -2),$
$\vec{a}_4 = (2,\ -4,\ 6, -2).$

2.3-ҮТ

1. а) Берілген $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ векторлары R^3 кеңістігінде базис құрайтынын дәлелдеу керек;

ә) $\vec{d}$ векторын осы базистің сызықты комбинациясы түрінде өрнектеу керек.

1.1. $\vec{a}$ =(5,4,1), $\vec{b}$ =(–3,5,2), $\vec{c}$ =(2,–1,3), $\vec{d}$ =(7,23,4).
Жауабы: (3,2,–1).

1.2. $\vec{a}$ =(2,–1,4), $\vec{b}$ =(–3,0,–2), $\vec{c}$ =(4,5,–3), $\vec{d}$ =(0,11,–14).
Жауабы: (–1,2,2).

1.3. $\vec{a}$ =(–1,1,2), $\vec{b}$ =(2,–3,–5), $\vec{c}$ =(–6,3,–1), $\vec{d}$ =(28,–19,–7).
Жауабы: (2,3,–4).

1.4. $\vec{a}$ =(1,3,4), $\vec{b}$ =(–2,5,0), $\vec{c}$ =(3,–2,–4), $\vec{d}$ =(13,–5,–4).
Жауабы: (2,–1,3).

1.5. $\vec{a}$ =(1,–1,1), $\vec{b}$ =(–5,–3,1), $\vec{c}$ =(2,–1,0), $\vec{d}$ =(–15,–10,5).
Жауабы: 2,3,–1).

1.6. $\vec{a}$ =(3,1,2), $\vec{b}$ =(–7,–2,–4), $\vec{c}$ =(–4,0,3), $\vec{d}$ =(16,6,15).
Жауабы: (2,–2,1).

1.7. $\vec{a}$ =(–3,0,1), $\vec{b}$ =(2,7,–3), $\vec{c}$ =(–4,3,5), $\vec{d}$ =(–16,33,13).
Жауабы: (2,3,4).

1.8. $\vec{a}$ =(5,1,2), $\vec{b}$ =(–2,1,–3), $\vec{c}$ =(4,–3,5), $\vec{d}$ =(–45,15,–66).
Жауабы: (–1,28,4).

1.9. $\vec{a}$ =(0,2,–3), $\vec{b}$ =(4,–3,–2), $\vec{c}$ =(–5,–4,0), $\vec{d}$ =(–19,–5,–4).
Жауабы: (2,–1,3).

1.10. $\vec{a}$ =(3,–1,2), $\vec{b}$ =(–2,3,1), $\vec{c}$ =(4,–5,–3), $\vec{d}$ =(–3,2,–3).
Жауабы: (–1,2,1).

1.11. $\vec{a}$ =(5,3,1), $\vec{b}$ =(–1,2,–3), $\vec{c}$ =(3,–4,2), $\vec{d}$ =(–9,34,–20).
(**Жауабы:** (2,4,–5).)

1.12. $\vec{a}$ =(3,1,–3), $\vec{b}$ =(–2,4,1), $\vec{c}$ =(1,–2,5), $\vec{d}$ =(1,12,–20).
Жауабы: (2,1,–3).

1.13. $\vec{a}=(6,1,-3), \vec{b}=(-3,2,1), \vec{c}=(-1,-3,4), \vec{d}=(15,6,-17)$.

Жауабы: (1,–2,–3).

1.14. $\vec{a}=(4,2,3), \vec{b}=(-3,1,-8), \vec{c}=(2,-4,5), \vec{d}=(-12,14,-31)$.

Жауабы: (0,2,–3).

1.15. $a=(-2,1,3), \vec{b}=(3,-6,2), \vec{c}=(-5,-3,-1), \vec{d}=(31,-6,22)$.

Жауабы: (3,4,–5).

1.16. $\vec{a}=(1,3,6), \vec{b}=(-3,4,-5), \vec{c}=(1,-7,2), \vec{d}=(8,47,65)$.

Жауабы: (12,1,–1).

1.17. $\vec{a}=(7,2,1), \vec{b}=(5,1,-2), \vec{c}=(-3,4,5), \vec{d}=(26,11,1)$.

Жауабы: (2,3,1).

1.18. $\vec{a}=(3,5,4), \vec{b}=(-2,7,-5), \vec{c}=(6,-2,1), \vec{d}=(6,-9,22)$.

Жауабы: (2,–3,–1).

1.19. $\vec{a}=(5,3,2), \vec{b}=(2,-5,1), \vec{c}=(-7,4,-3), \vec{d}=(36,1,15)$.

Жауабы: (5,2,–1).

1.20. $\vec{a}=(11,1,2), \vec{b}=(-3,3,4), \vec{c}=(-4,-2,7), \vec{d}=(-5,11,-15)$.

Жауабы: (–1,2,–3).

1.21. $\vec{a}=(9,5,3), \vec{b}=(-3,2,1), \vec{c}=(4,-7,4), \vec{d}=(-10,-13,8)$.

Жауабы: (–1,3,2).

1.22. $\vec{a}=(7,2,1), \vec{b}=(3,-5,6), \vec{c}=(-4,3,-4), \vec{d}=(-1,18,-16)$.

Жауабы: (2,–1,3).

1.23. $\vec{a}=(1,2,3), \vec{b}=(-5,3,-1), \vec{c}=(-6,4,5), \vec{d}=(-4,11,20)$.

Жауабы: (3,–1,2).

1.24. $\vec{a}=(-2,5,1), \vec{b}=(3,2,-7), \vec{c}=(4,-3,2), \vec{d}=(-4,22,-13)$.

Жауабы: (3,2,–1).

1.25. $\vec{a}=(3,1,2), \vec{b}=(-4,3,-1), \vec{c}=(2,3,4), \vec{d}=(14,14,20)$.

Жауабы: (2,0,4).

1.26. $\vec{a}=(3,-1,2), \vec{b}=(-2,4,1), \vec{c}=(4,-5,-1), \vec{d}=(-5,11,1)$.

Жауабы (–1,5,2).

1.27. $\vec{a}=(4,5,1), \vec{b}=(1,3,1), \vec{c}=(-3,-6,7), \vec{d}=(19,33,0)$.

Жауабы: (3,4,–1).

1.28. $\vec{a}$ =(1,–3,1), b=(–2,–4,3), $\vec{c}$ =(0,–2,3), $\vec{d}$ =(–8,–10,13).
Жауабы: (–2,3,2).

1.29. $\vec{a}$ =(5,7,–2), $\vec{b}$ =(–3,1,3), $\vec{c}$ =(1,–4,6), $\vec{d}$ =(14,9,–1).
Жауабы: (2,–1,1).

1.30. $\vec{a}$ =(–1,4,3), $\vec{b}$ =(3,2,–4), $\vec{c}$ =(–2,–7,1), $\vec{d}$ =(6,20,–3).
Жауабы: (1,1,–2).

2. Берілген $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3,c_4)$, $\vec{d}=(d_1,\,d_2,d_3,d_4)$ векторлары R^4 кеңістігінің базисін құрайды ма? Жауабыңызды негіздеңіз.

2.1. $\vec{a}=(2,1,3,0)$, $\vec{b}=(2,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,4,3,-1)$, $\vec{d}=(5,3,0,1)$.

2.2. $\vec{a}=(1,1,1,0)$, $\vec{b}=(3,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(4,3,0,1)$.

2.3. $\vec{a}=(4,1,1,0)$, $\vec{b}=(6,1,3,0)$, $\vec{c}=(2,2,3,-1)$, $\vec{d}=(7,3,0,1)$.

2.4. $\vec{a}=(1,-1,1,0)$, $\vec{b}=(-3,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(4,3,0,1)$.

2.5. $\vec{a}=(5,2,1,0)$, $\vec{b}=(1,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.6. $\vec{a}=(2,1,1,0)$, $\vec{b}=(8,1,3,0)$, $\vec{c}=(7,2,3,-1)$, $\vec{d}=(4,3,0,1)$.

2.7. $\vec{a}=(3,2,1,0)$, $\vec{b}=(2,1,3,0)$, $\vec{c}=(-4,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.8. $\vec{a}=(0,2,1,0)$, $\vec{b}=(1,0,3,0)$, $\vec{c}=(1,1,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.9. $\vec{a}=(-2,2,1,0)$, $\vec{b}=(1,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,4,3,-1)$, $\vec{d}=(3,3,0,1)$.

2.10. $\vec{a}=(8,2,1,0)$, $\vec{b}=(1,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.11. $\vec{a}=(5,-2,1,1)$, $\vec{b}=(1,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.12. $\vec{a}=(0,2,1,0)$, $\vec{b}=(0,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.13. $\vec{a}=(5,2,1,0)$, $\vec{b}=(9,1,3,0)$, $\vec{c}=(0,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,0,0,1)$.

2.14. $\vec{a}=(5,2,1,0)$, $\vec{b}=(1,3,3,0)$, $\vec{c}=(1,5,3,-1)$, $\vec{d}=(4,3,0,1)$.

2.15. $\vec{a}=(2,2,1,0)$, $\vec{b}=(1,7,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,8,0,1)$.

2.16. $\vec{a}=(-5,-2,1,0)$, $\vec{b}=(1,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.17. $\vec{a}=(3,0,1,0)$, $\vec{b}=(3,1,3,0)$, $\vec{c}=(8,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.18. $\vec{a}=(1,1,1,1)$, $\vec{b}=(1,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,5,0,1)$.

2.19. $\vec{a}=(3,1,1,0)$, $\vec{b}=(5,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.20. $\vec{a}=(1,2,1,0)$, $\vec{b}=(1,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,1,3,-1)$, $\vec{d}=(1,1,0,1)$.

2.21. $\vec{a}=(0,2,1,0)$, $\vec{b}=(1,4,3,0)$, $\vec{c}=(1,0,3,-1)$, $\vec{d}=(5,3,0,1)$.

2.22. $\vec{a}=(3,3,1,0)$, $\vec{b}=(-2,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,0,0,1)$.

2.23. $\vec{a}=(3,1,1,1)$, $\vec{b}=(1,2,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,6,-1)$, $\vec{d}=(1,5,0,1)$.

2.24. $\vec{a}=(0,-2,1,0)$, $\vec{b}=(1,5,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,7,0,1)$.

2.25. $\vec{a}(9,0,1,0)$, $\vec{b}=(1,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,0,0,1)$.

2.26. $\vec{a}=(7,2,1,0)$, $\vec{b}=(1,1,2,0)$, $\vec{c}=(1,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,9)$.

2.27. $\vec{a}=(7,0,1,1)$, $\vec{b}=(1,4,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,9,-1)$, $\vec{d}=(1,1,0,1)$.

2.128 $\vec{a}=(0,0,1,0)$, $\vec{b}=(8,1,3,0)$, $\vec{c}=(9,2,3,-1)$, $\vec{d}=(1,3,0,1)$.

2.29. $\vec{a}=(1,1,1,1)$, $\vec{b}=(-1,1,3,0)$, $\vec{c}=(1,2,0,-1)$, $\vec{d}=(1,0,0,1)$.

2.30. $\vec{a}=(1,2,3,0)$, $\vec{b}=(-2,1,1,0)$, $\vec{c}=(1,4,3,-1)$, $\vec{d}=(1,1,0,1)$.

2.3-ҮТ орындау үлгісі

1. а) Берілген $\vec{a}=(3,-1,0)$, $\vec{b}=(2,3,1)$, $\vec{c}=(-1,4,3)$ векторлары R^3 кеңістігінде базис құрайтынын дәлелдеу керек;

ә) $\vec{d}=(2,3,7)$ векторын осы базистің сызықты комбинациясы түрінде өрнектеп жазу керек.

▼ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін табамыз (§ 2.7, (1)-қараңыз): $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0.$ Бұл теңсіздік, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

векторларының компланар емес екенін көрсетеді, яғни $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлары R^3 кеңістігінде базис құрайды (§ 2.3. қараңыз). Олай болса $\vec{d}$ векторын осы базистік векторлардың сызықты комбинациясы түрінде жазуға болады: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Мұндағы $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ белгісіздерін табу үшін векторларға қатысты амалдарды орындап және векторлардың теңдік белгісін пайдалансақ, келесі жүйені аламыз

$$\begin{cases} 3\alpha+2\beta-\gamma=2, \\ -\alpha+3\beta+4\gamma=3, \\ \qquad\ \beta+3\gamma=7. \end{cases}$$

Алынған жүйені Крамер ережесін пайдаланып шешеміз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=22, \qquad \Delta(\alpha)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=66,$$

$$\Delta(\beta)=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}=-44,$$

$$\Delta(\gamma)=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}=66, \qquad \alpha=\frac{\Delta(\alpha)}{\Delta}=3, \qquad \beta=\frac{\Delta(\beta)}{\Delta}=-2,$$

$$\gamma=\frac{\Delta(\gamma)}{\Delta}=3.$$

Жауабы: $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$. ▲

2. Берілген $\vec{a}=(1,-1,0,0)$, $\vec{b}=(2,1,3,0)$, $\vec{c}=(-1,4,3,1)$, $\vec{d}=(2,3,0,1)$ векторлары R^4 кеңістігінде базис құрайды ма?

▼ Берілген векторларды жолдар етіп матрица аламыз және оның рангін табу үшін элементар түрлендірулер арқылы оны трапеция тәрізді матрицаға келтіреміз:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица рангі $r = 4$ тең болғандықтан **§ 2.9** анықтамаға сәйкес, берілген $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ - векторлары сызықты тәуелсіз жүйені құрайды. Негізгі теорема бойынша, кез келген сызықты тәуелсіз төрт вектор R^4 кеңістігінің базисін құрайды *Жауабы*: Құрайды. ▲

§ 2.11. Жазықтықтағы түзу

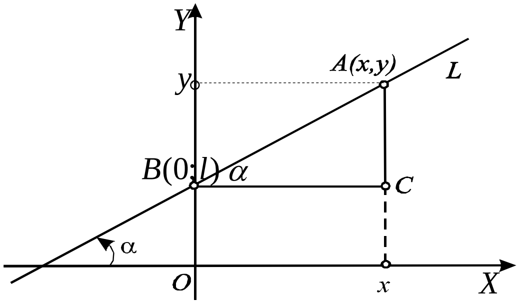
Түзу – геометриядағы алғашқы ұғымдардың (түсініктердің) бірі. Бізге: екі нүкте арқылы жалғыз түзу жүргізуге болатыны; түзу бойында жатқан нүкте арқылы осы түзуге перпендикуляр жалғыз түзу жүргізуге болатыны және т.с.с. аксиомалар мектеп бағдарламасы бойынша таныс. Келесі есептерде қойылатын шарттар да жалғыз түзуді анықтайтынына зер салыңыз.

Элементар математика курсынан белгілі есепті еске түсірейік. OX өсінің оң бағытымен α бұрыш жасап, OY өсін $y = l$ нүктесінде (19-суретте, $l = OB$) қиятын, яғни $B(0;l)$ нүктесінен өтетін, L түзуінің теңдеуін жазу керек.

▼ $A(x, y)$ – түзудің кез келген нүктесі болсын. Онда (19-суретті қараңыз) $tg\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{y-l}{x}$, ал бұдан $k = tg\alpha$ деп белгілеп L түзуінің теңдеуін аламыз

$$y = kx + l. \tag{1}$$

Мұндағы $k = tg\alpha$ **түзудің бұрыштық коэффициенті** деп аталатын еді. ▲



19-сурет

1-есеп. ***Бұрыштық коэффициенті k тең және*** (x_0, y_0) ***нүктесі арқылы өтетін түзу теңдеуін*** жазу керек.

▼ Бұрыштық коэффициенті k тең (1) түзу $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетіндіктен,

$$y_0 = kx_0 + l \tag{2}$$

теңдігі орындалады. (1) теңдіктен (2) теңдікті мүшелеп шегеріп, іздеп отырған теңдеуді аламыз ($k = tg\alpha$):

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad ▲ \tag{3}$$

Назар аударыңыз! (1) теңдеу (3) теңдеудің $x_0 = 0$ тең, дербес жағдайы!

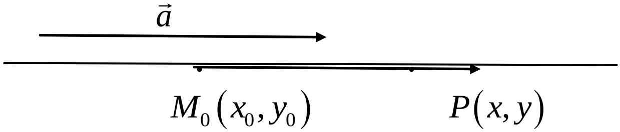
Берілген түзуде жататын (немесе оған параллель) векторды түзудің **бағыттаушы векторы** деп атаймыз.

2-есеп. $M_0\left(x_0, y_0\right)$ нүктесі арқылы өтетін және бағыттаушы векторы $\vec{a}\left(a_1, a_2\right)$ тең түзудің теңдеуін жазу керек (төмендегі суретті қараңыз).

▼ $P\left(x, y\right)$ - түзудің кез келген нүктесі болсын. Онда

$\overrightarrow{M_0P}=\left(x-x_0,\ y-y_0\right)$ және $\vec{a}\left(a_1,a_2\right)$ векторлары коллинеар болады да келесі теңдікті аламыз

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}. \tag{4}$$



Салдар. $M_1(x_1,y_1)$ және $M_2(x_2,y_2)$ - ***екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуін*** жазу керек.

▼ (4) теңдікті пайдаланамыз: түзу $M_1(x_1,y_1)$ нүктесі арқылы өтеді және $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1,\ y_2-y_1\right)$ - оның бағыттаушы векторы. Олай болса, берілген $M_1(x_1,y_1)$ және $M_2(x_2,y_2)$ ***екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі*** келесі түрде жазылады:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{5}$$

Егер $x_1=x_2$ болса, онда

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{6}$$

түзуінің $\vec{a}\left(0,\ y_2-y_1\right)$ бағыттаушы векторы мен OY өсінің орты: $j\left(0,1\right)$ коллинеар болғандықтан, түзу OY өсіне параллель екенін көреміз. Және (6) теңдіктен $x-x_1=0\cdot\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ немесе $x=x_1$, аламыз.

Осы сияқты, егер $y_1=y_2$ болса, онда $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{0}$ түзуі OX өсіне параллель және оның теңдеуі $y=y_1$ болады. ▲

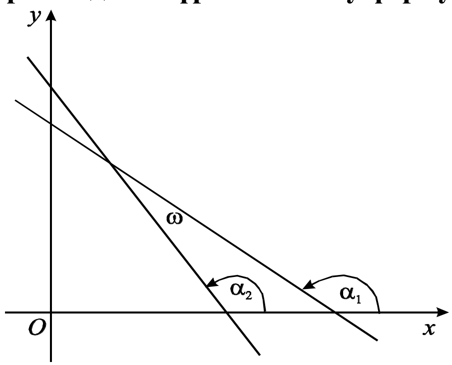
3-есеп. $y=k_1x+l_1$ және $y=k_2x+l_2$ **түзулерінің арасындағы** ω **бұрышын** табу керек (20-сурет).

▼ α_1, α_2 – екі түзудің OX өсінің оң бағытымен жасайтын бұрыштары; $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ – бұрыштық коэффициенттер.

Суреттен, ізделінген ω бұрышы $\omega = \alpha_1 - \alpha_2$ тең болатынын көреміз. Олай болса,

$$tg\omega = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \quad (7)$$

Бұл – **екі түзу арасындағы бұрышты табу формуласы**. ▲



20-сурет

(7) теңдіктен, **екі түзудің перпендикулярлық белгісін** $1 + k_1 k_2 = 0$ немесе

$$k_1 k_2 = -1 \quad (8)$$

түрінде, ал **екі түзудің параллельдік** ($tg\omega = 0$) белгісін $k_1 - k_2 = 0$ немесе келесі түрде жазуға болатындығын көреміз

$$k_1 = k_2. \quad (9)$$

Енді жазықтықтағы түзудің ***жалпы теңдеуі*** деп аталатын

$$Ax + By + C = 0 \quad (10)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы *A, B, C* – сандар және *A* мен *B* – бір мезгілде нөлге тең емес және осы сандар түзудің орнын анықтайды. Енді осы жағдайларды қарастырайық.

Егер $C=0$ болса, онда $Ax+By=0$ түзуі координаттар бас нүктесінен өтеді, өйткені $O(0,0)$ нүктесінің координаттары түзу теңдеуін қанағаттандырады.

Егер $B\neq 0$ болса, онда (10) теңдеуді $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$ түрінде, ал мұнда $k=-\dfrac{A}{B}$, $l=-\dfrac{C}{B}$ деп алсақ, (1) теңдеу түрінде: $y=kx+l$ жаза аламыз.

Егер B=0, $A\neq 0$ болса, онда $Ax+C=0$ немесе $a=-\dfrac{C}{A}$ деп белгілеп келесі теңдеуді аламыз

$$x=a. \tag{11}$$

Бұл түзу - жоғарыда айтылған OY өсіне параллель, абсциссалары a тең болатын нүктелердің геометриялық орны (21-суретті қараңыз).

Егер A=0, (B≠0) болса, онда $y=-\dfrac{C}{B}$ немесе $b=-\dfrac{C}{B}$ деп белгілеп келесі теңдеуді аламыз

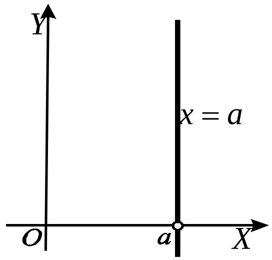
$$y=b. \tag{12}$$

Бұл түзу де, жоғарыда айтылған OX өсіне параллель, ординаталары b санына тең болатын нүктелердің геометриялық орны (22-сурет).

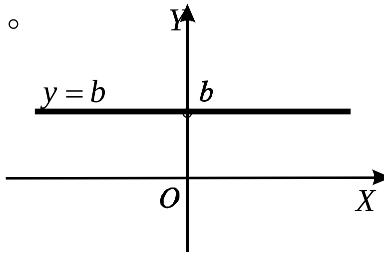
Егер (11) теңдеуінде a = 0 болса, онда OY өсінің теңдеуін: x = 0, ал (12) теңдеуде b = 0 болса, онда OX өсінің теңдеуін: y = 0 аламыз.

Ыңғайлылық үшін OX, OY - өстерін сәйкес OX_1, OX_2 арқылы, x, y айнымалдарын сәйкес x_1, x_2 арқылы, A, B коэффициенттерін сәйкес A_1, A_2 арқылы ауыстырып белгілеп, (10) теңдеуді келесі түрде жазамыз

$$A_1x_1+A_2x_2+C=0 \tag{10*}$$



21-сурет



22-сурет

Егер $A_1 \neq 0,\ A_2 \neq 0,\ C \neq 0$ болса, онда (10*) теңдеуін мына түрге келтіруге болады ($a = \frac{-C}{A_1}, \quad b = \frac{-C}{A_2}$):

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1. \qquad (13)$$

(13) – **түзудің кесінділік теңдеуі** деп аталады. Бұл түзу, OX_1 өсін (a,0), ал OX_2 өсін (0,b) нүктесінде қияды.

Мысалы, $2x + 3y - 6 = 0$ түзуінің кесінділік теңдеуі $\frac{2}{6}x + \frac{3}{6}y = 1$ немесе $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ түрінде жазылады. Ол OX_1 өсін (3;0) нүктесінде, OX_2 өсін (0;2) нүктесінде қияды.

Егер (10*) теңдеуімен берілген түзу $M_0(x_1^0, x_2^0)$ нүктесі арқылы өтетін болса, онда

$$A_1x_1^0 + A_2x_2^0 + C = 0 \qquad (14)$$

теңдігі орындалады. (10*) теңдіктен (14) теңдікті мүшелеп шегерсек

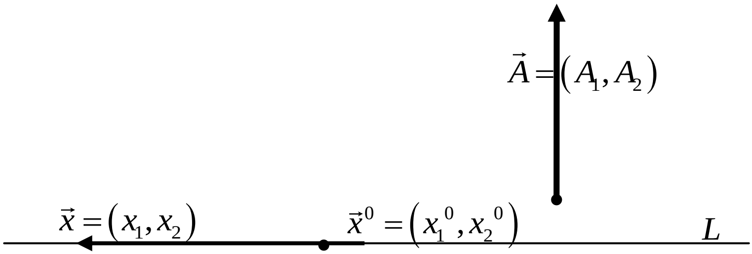
$$A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) = 0. \qquad (15)$$

Бұл, $M_0(x_1^0, x_2^0)$ **нүктесі арқылы өтетін түзу теңдеуі.**

Егер $\vec{A}=(A_1,A_2)$, $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $\vec{x}^0=(x_1^0,x_2^0)$ радиус-векторлар екенін ескерсек, онда (15) теңдеудің сол жағындағы шама $\vec{A}=(A_1,A_2)$ векторы мен $\vec{x}-\vec{x}^0=\left(x_1-x_1^0, x_2-x_2^0\right)$ векторының скаляр көбейтіндісі екені көрінеді:

$$\vec{A}(\vec{x}-\vec{x}^0)=0. \tag{15$'$}$$

Мұндағы $\vec{x}-\vec{x}^0$ векторы L түзуінде жатыр (23-сурет). Олай болса, (15′) теңдіктен, $\vec{A}=(A_1,A_2)$ **векторы – берілген түзуге перпендикуляр болатынын көреміз.** Бұл – A_1, A_2 **коэффициенттерінің геометриялық мағынасы.**



23-сурет

Сонымен, $\vec{A}(A_1,A_2)$ векторына перпендикуляр және $M_0(x_1^0,x_2^0)$ нүктесі арқылы өтетін түзу, (15) теңдеумен немесе (15′) векторлық теңдеумен анықталады екен. Олай болса, (10*) - $\vec{A}(A_1,A_2)$ векторына перпендикуляр және $(0,\dfrac{-C}{A_2})$ нүктесі арқылы өтетін түзу!

Түзуге перпендикуляр вектор осы түзудің **нормалі (нормаль векторы)** деп аталады және ол көбінесе $\vec{n}$ немесе **n** қою әрпімен белгіленеді.

Мысалы, $y=2x+3$ түзуінің нормалін табу үшін, оның жалпы теңдеуін жазу керек: $y-2x-3=0$. Бұдан $\vec{n}=(-2;1)$ аламыз.

Енді

$$L_1:\quad A_1x_1+A_2x_2+C_1=0, \tag{16}$$

$$L_2: \quad B_1x_1 + B_2x_2 + C_2 = 0 \tag{17}$$

түзулерінің арасындағы φ бұрышын табайық.

$\vec{A} = (A_1, A_2) \perp L_1$ және $\vec{B} = (B_1, B_2) \perp L_2$ болғандықтан, $\varphi = \angle \vec{A}\vec{B}.$ Олай болса,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{A}\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cdot\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}. \tag{18}$$

(18) теңдіктен **L_1 және L_2 түзулерінің перпендикулярлық белгісін** аламыз:

$$A_1B_1 + A_2B_2 = 0. \tag{19}$$

Егер екі түзу параллель болса ($L_1 \parallel L_2$), онда $\vec{A}$ мен $\vec{B}$ векторлары коллинеар болатындықтан келесі теңдікті жаза аламыз

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}. \tag{20}$$

Бұл – **түзулердің параллельдік белгісі.**

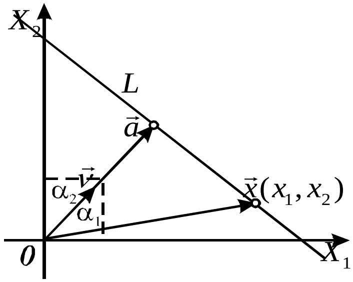
Мысал. $L_1: \quad x + 2y - 3 = 0$ және $L_2: \ -2x + y + 5 = 0$ түзуле-рінің арасындағы бұрышты табайық. ($\vec{n}_1 = (1,\ 2)$, $\vec{n}_2 = (-2,\ 1)$) болған-дықтан,

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 0, \text{ демек, } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

4-Есеп: Тікбұрышты OX_1X_2 координаттар жүйесінде $\vec{a}$ радиус-векторы берілген: $|\vec{a}| = p,$ ал $\vec{\mathrm{v}} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2)$ – оның орты. Осы $\vec{a}$ векторының ұшы арқылы өтетін және оған перпендикуляр L түзуінің теңдеуін жазу керек (24-сурет).

▼ L түзуінің кез келген $\vec{x}(x_1, x_2)$ нүктесінің (радиус-вектордың) $\vec{\mathrm{v}}$ ортына проекциясы $\Pi p_{\vec{\mathrm{v}}}\vec{x} = |\vec{x}|\cos < (\vec{x}, \vec{\mathrm{v}}) = p$ тең (мұнда $<\ (\vec{x}, \vec{\mathrm{v}})$

бұрышының мәндері $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ аралығында болатындықтан, $\Pi p_{\vec{\nu}}\vec{x}\geq 0$).



24-сурет

Бұдан $|\vec{\nu}|\Pi p_{\vec{\nu}}\vec{x}=p$ немесе **түзудің векторлық теңдеуі** деп аталатын теңдеуді аламыз

$$(\vec{x},\vec{\nu})=p. \tag{21}$$

Керісінше, (21) теңдеуді қанағаттандыратын әрбір $\vec{x}$ нүкте L түзуінде жатады.

Егер (21) теңдеуді векторлардың координаттары бойынша жазсақ, онда

$$x_1\cos\alpha_1+x_2\cos\alpha_2=p \quad (p\geq 0), \tag{21$'$}$$

немесе $\cos\alpha_2=\cos(90^0-\alpha_1)=\sin\alpha_1$ теңдіктерін ескеріп,

$$x_1\cos\alpha_1+x_2\sin\alpha_1=p \quad (p\geq 0) \tag{21$''$}$$

аламыз. Бұл – түзудің **нормаль теңдеуі** деп аталады (мұнда $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2=1$).

Назар аударыңыз! Бұл теңдеулердегі p саны – координаттың бас нүктесінен түзуге дейінгі қашықтық, ал белгісіздердің коэффициенттері – осы түзуге перпендикуляр вектордың бағыттаушы косинустары (вектор ортының координаттары).

Егер L түзуі $A_1x_1+A_2x_2+C=0$ жалпы теңдеуімен берілсе, онда оны ***нормальдаушы көбейткіш*** деп аталатын $M = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$ санына көбейту арқылы нормаль теңдеуге өтуге болады (мұндағы таңба, $p = -M \cdot C \geq 0$ болуы үшін, C-ның таңбасына қарама-қарсы болатындай етіп таңдалады):

$$\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} x_1 + \frac{A_2}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} x_2 = -\frac{C}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}. \tag{22}$$

Бұл жағдайда $\left(\dfrac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{A_2}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\right)^2 = 1$ теңдігі орындалатындықтан, $0 \leq \alpha_1 < 2\pi$ бұрышының $M \cdot A_1 = \cos\alpha_1$, $M \cdot A_2 = \sin\alpha_1$ теңдіктері орындалатын жалғыз мәні бар. Олай болса, (22) – түзудің нормаль теңдеуі және мұнда $p = -\dfrac{C}{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$.

Мысал. $3x + 4y + 10 = 0$ теңдеуінен нормаль теңдеуге өту керек және $O(0,0)$ нүктесінен осы түзуге дейінгі қашықтықты табу керек.

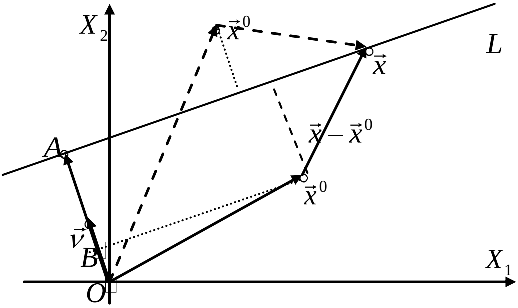
▼ $C = 10 > 0$ болғандықтан, ($A_1 = 3,\quad A_2 = 4$) теңдеудің екі жағын $M = -\dfrac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\dfrac{1}{5}$ санына көбейтсек, $-\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - 2 = 0$ немесе $-\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y = 2$. Мұнда: $\cos\alpha_1 = -\dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha_1 = -\dfrac{4}{5}$, $p = 2$. Ал $d = p = 2$ ((21″)-қараңыз). ▲

5-есеп. $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ нүктесінен $A_1x_1 + A_2x_2 + C = 0$ теңдеуімен анықталған түзуге дейінгі d қашықтықты табу керек.

▼ Түзудің жалпы теңдеуінен (22) нормаль теңдеуге, одан соң

$$\vec{v}=\left(\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2}},\frac{A_2}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2}}\right),\quad \vec{x}=(x_1,x_2),\quad p=\frac{-C}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2}}$$

деп белгілеп алып, векторлық теңдеуге өтеміз: $(\vec{x},\vec{\text{v}})=p$ немесе $(\vec{x},\vec{\text{v}})-p=0$ (25-сурет). Суретте $\vec{a}=\overrightarrow{OA}\perp L$, $\left|\overrightarrow{OA}\right|=p$, ал $\vec{\text{v}}$ векторы, $\overrightarrow{OA}\perp L$ векторының орты. Егер L түзуінің кез келген $\vec{x}(x_1,x_2)$ нүктесін алсақ, онда $d=\left|\Pi p_{\vec{\text{v}}}(\vec{x}-\vec{x}^0)\right|=\left|\overline{BA}\right|$.



25-сурет

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің қасиеттері бойынша

$$d=\left|\Pi p_{\vec{\text{v}}}(\vec{x}-\vec{x}^0)\right|=\left|\left|\vec{\text{v}}\right|\cdot\Pi p_{\vec{\text{v}}}(\vec{x}-\vec{x}^0)\right|=\left|(\vec{x}-\vec{x}^0,\vec{\text{v}})\right|=\left|(\vec{x},\vec{\text{v}})-(\vec{x}^0,\vec{\text{v}})\right|=$$

$=\left|p-(\vec{x}^0,\vec{\text{v}})\right|=\left|(\vec{x}^0,\vec{\text{v}})-p\right|$ аламыз. Сонымен $\vec{x}^0=(x_1^0,x_2^0)$ нүктесінен $(\vec{x},\vec{\text{v}})-p=0$ түзуіне дейінгі қашықтықтың формуласын алдық:

$$d=\left|(\vec{x}^0,\vec{\text{v}})-p\right|. \tag{23}$$

Егер (23)-ті векторлардың координаттары арқылы жазсақ, онда

$$d=\frac{\left|A_1x_1^0+A_2x_2^0+C\right|}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}}. \tag{24}$$

Сонымен, $\vec{x}^0=(x_1^0,x_2^0)$ нүктесінен $A_1x_1+A_2x_2+C=0$ түзуіне дейінгі қашықтықты табу үшін, теңдеудегі x_1,x_2 айнымалдардың орнына $\vec{x}^0=(x_1^0,x_2^0)$ нүктесінің сәйкес координаттарын қойып, алынған өрнектің абсолют шамасын $\sqrt{A_1^2+A_2^2}$ санына бөлу керек. Мысалы, $M_0(1,-5)$ нүктесінен $L:3x+4y+7=0$ түзуіне дейінгі қашықтық ((24) қараңыз) $d=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-5)+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$ тең. ▲

Ескерту: $A_1x_1+A_2x_2+C=0,\quad A^2+B^2\neq 0$ түзуі жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі. Оның біреуінде жатқан нүктелер үшін $A_1x_1+A_2x_2+C>0$ теңсіздігі орындалса, екіншісінде жатқан нүктелер үшін $A_1x_1+A_2x_2+C<0$ теңсіздігі орындалады. Мысалы,

$M(1,3),\ N(-2,4)$ нүктелерінің координаттарын $-x+2y+3=0$ теңдеуіндегі айнымалдардың орындарына қойып сәйкес $-1\cdot 1+2\cdot 3+3=8>0$ және $-1\cdot(-2)+2\cdot 4+3=13>0$ аламыз. Endеше $M(1,3),\ N(-2,4)$ нүктелерін қосатын MN кесіндісі $-x+2y+3=0$ түзуімен қиылыспайды.

Мысал. $\vec{a}(-3;4)$ векторының ұшы арқылы өтетін және оған перпендикуляр түзудің теңдеуін жазу керек.

▼ Вектордың модулін және бағыттаушы косинустарын табамыз: $p=|\vec{a}(-3;4)|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5,\quad \cos\alpha=\dfrac{-3}{5},\ \cos\beta=\dfrac{4}{5}.$ Енді $(21')$ теңдеу бойынша $-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=5$ немесе $-3x+4y-25=0$ аламыз. ▲

Тақырыпқа арналған сұрақтар мен жаттығулар

1. Жазықтықтағы түзудің бұрыштық коэффициент арқылы берілген теңдеуін жазыңыз және ондағы параметрлердің (тұрақты шамалардың) геометриялық сипатын түсіндіріңіз.

2. Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуін жазыңыз және ондағы коэффициентерге байланысты дербес жағдайларды қарастырыңыз.

3. Берілген бұрыштық коэффициенті бойынша, (x_0, y_0) нүктесі арқылы өтетін түзу теңдеуін қорытып шығарыңыз. Мысал келтіріңіз.

4. Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуін қорытып шығарыңыз. Оның координаттық өстерге параллель болу жағдайларын қарастырыңыз. Мысал келтіріңіз.

5. Бұрыштық коэффициенттері арқылы берілген екі түзу арасын-дағы бұрышты табу формуласын қорытып шығарыңыз. Екі түзудің перпендикулярлық, параллельдік белгілерін жазыңыз.

6. Түзудің кесінділік теңдеуін жазыңыз. Жазықтықтағы түзудің берілген жалпы теңдеуінен кесінділік теңдеуге және керісінше өту жағдайларын мысал арқылы түсіндіріңіз.

7. Берілген нүкте арқылы өтетін жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуін жазыңыз және оның коэффициенттерінің геомет-риялық мағынасын түсіндіріңіз.

8. Жалпы теңдеулермен берілген екі түзу арасындағы бұрышты табу формуласын қорытып шығарыңыз. Екі түзудің перпендикулярлық, параллельдік белгілерін жазыңыз. Мысал келтіріңіз.

9. Жазықтықтағы түзудің векторлық теңдеуін қорытып шығарыңыз. Түзудің нормаль теңдеуін жазыңыз.

10. Нормальдаушы көбейткіш деген не және жазықтықтағы түзудің берілген жалпы теңдеуінен нормаль теңдеуге қалай өтуге болады? Мысал келтіріңіз.

11. Берілген нүктеден түзуге дейінгі қашықтық формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.

2.4–ҮТ

1. *ABC* үшбұрышының төбелері берілген: $A(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$, $C(x_3 y_3)$.

а) *AB* түзуінің теңдеуін;

б) *CH* биіктігінің теңдеуін;

в) *AM* медианасының теңдеуін;

г) *AM* медиана мен *CH* биіктіктің *N* қиылысу нүктесін;

д) *C* төбесі арқылы өтетін *AB* қабырғасына параллель түзудің теңдеуін;

е) *C* нүктесінен *AB* түзуіне дейінгі қашықтықты ***табу керек.***

1.1.	A(–2,4),	B(3,1),	C(10,7).
1.2.	A(–3,–2),	B(14,4),	C(6,8).
1.3.	A(1,7),	B(–3,–1),	C(11,–3).
1.4.	A(1,0),	B(–1,4),	C(9,5).
1.5.	A(1,–2),	B(7,1),	C(3,7).
1.6.	A(–2,–3),	B(1,6),	C(6,1).
1.7.	A(–4,2),	B(–6,6),	C(6,2).
1.8.	A(4,–3),	B(7,3),	C(1,10).
1.9.	A(4,–4),	B(8,2),	C(3,8).
1.10.	A(–3,–3),	B(5,–7),	C(7,7).
1.11.	A(1,–6),	B(3,4),	C(–3,3).
1.12.	A(–4,2),	B(8,–6),	C(2,6).
1.13.	A(–5,2),	B(0,–4),	C(5,7).
1.14.	A(4,–4),	B(6,2),	C(–1,8).
1.15.	A(–3,8),	B(–6,2),	C(0,–5).
1.16.	A(6,–9),	B(10,–1),	C(–4,1).
1.17.	A(4,1),	B(–3,–1),	C(7,–3).
1.18.	A(–4,2),	B(6,–4),	C(4,10).
1.19.	A(3,–1),	B(11,3),	C(–6,2).
1.20.	A(–7,–2),	B(–7,4),	C(5,–5).
1.21.	A(–1,–4),	B(9,6),	C(–5,4).
1.22.	A(10,–2),	B(4,–5),	C(–3,1).
1.23.	A(–3,–1),	B(–4,–5),	C(8,1).
1.24.	A(–2,–6),	B(–3,5),	C(4,0).
1.25.	A(–7,–2),	B(3,–8),	C(–4,6).
1.26.	A(0,2),	B(–7,–4),	C(3,2).

1.27.	A(7,0),	B(1,4),	C(–8,–4).
1.28.	A(1,–3),	B(0,7),	C(–2,4).
1.29.	A(–5,1),	B(8,–2),	C(1,4).
1.30.	A(2,5),	B(–3,1),	C(0,4).

2

2.1. $3x-2y-7=0$ және $x+3y-6=0$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, абсцисса өсінде 3-ке тең кесінді қиятын түзу теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $x=3$.

2.2. $A(-8,12)$ нүктесінің $B(2,-3)$ мен $C(-5,1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудегі проекциясын табу керек. **Жауабы:** $A_1(-12,5)$.

2.3. ABC үшбұрышының екі төбесі: $A(-4,4)$, $B(4,-12)$ және биіктіктерінің қиылысу нүктесі: $M(4,2)$ берілген. C төбесін табу керек. **Жауабы:** $C(8,4)$.

2.4. Ордината өсін $y=2$ нүктесінде қиятын және $2y-x=3$ түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін табу керек.

Жауабы: $x-2y+4=0$.

2.5. $A(2,-3)$ нүктесінен өтетін және $2x-y=5$ пен $x+y=1$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін табу керек. **Жауабы:** $x=2$.

2.6. Төбелері $A(3,6)$, $B(5,2)$, $C(-1,-3)$, $D(-5,5)$ нүктелері болатын $ABCD$ төртбұрышы, трапеция болатынын дәлелдеу керек.

2.7. $B(2,5)$, $C(1,0)$ нүктелері арқылы өтетін түзуге перпендикуляр және $A(3,1)$ нүктесінен өтетін түзу теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x+5y-8=0$.

2.8. $M(-3,-2)$, $N(1,6)$ нүктелері нүктелері арқылы өтетін түзуге параллель және $A(-2,1)$ нүктесінен өтетін түзу теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $2x-y+5=0$.

2.9. $x-2y+3=0$ түзуімен салыстырғанда $M(2,-1)$ нүктесіне симметриялы нүктені табу керек. **Жауабы:** $M_1\left(-\frac{4}{5},\frac{23}{5}\right)$.

2.10. Төбелері $A(-1,-3)$, $B(3,5)$, $C(5,2)$, $D(3,-5)$ болатын $ABCD$ төртбұрыштың диагональдарының O қиылысу нүктесін табу керек. **Жауабы:** $O\left(3,\frac{1}{3}\right)$.

2.11. $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, абсцисса өсіне параллель түздің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $y=-1$.

2.12. ABC үшбұрышының AB қабырғасының теңдеуі: $4x+y=12$, оның биіктіктері (BH): $5x-4y=12$ және (AM): $x+y=6$. Осы үшбұрыштың басқа екі қабырғасының теңдеуін табу керек.

Жауабы: $7x-7y-16=0$, $4x+5y-28=0$.

2.13. ABC үшбұрышының екі төбесі: $A(-6,2)$, $B(2,-2)$ және оның биіктіктерінің қиылысу нүктесі $H(1,2)$ берілген. AC қабырға мен BH биіктігінің қиылысу M нүктесін табу керек.

Жауабы: $M\left(\frac{10}{17},\frac{62}{17}\right)$.

2.14. $A(-4,2)$, $B(3,-5)$, $C(5,0)$ нүктелері берілген. ABC үшбұрышының A және B төбелері арқылы өтетін биіктіктерінің теңдеулерін табу керек. **Жауабы:** $2x+5y-2=0$, $9x-2y-37=0$.

2.15. Төбелері $A(2,3)$, $B(0,-3)$, $C(6,-3)$ болатын үшбұрыш қабырғаларының ортасына тұрғызылған перпендикулярлардың қиылысу нүктесін табу керек. **Жауабы:** $M\left(3,-\frac{2}{3}\right)$.

2.16. ABC үшбұрышының қабырғалары (AB): $2x-y-3=0$, (AC): $x+5y-7=0$, (BC): $3x-2y+13=0$. Оның A төбесінен жүргізілген биіктігінің теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $2x+3y-7=0$.

2.17. Үшбұрыштың төбелері $A(3,1)$, $B(-3,-1)$, $C(5,-12)$. Оның C төбесінен жүргізілген медианасының теңдеуін және осы медрананың ұзындығын табу керек. **Жауабы:** $12x+5y=0$, $d=13$.

2.18. Координат басынан өтетін және $2x+5y-8=0$ мен $2x+3y+4=0$ түзулерінің қиылысу нүктесінен өтетін түзудің теңдеуін табу керек. **Жауабы:** $6x+11y=0$.

2.19. $3x+5y-15=0$ түзуінің координат өстерімен қиылысу нүктелері арқылы өтетін және осы түзуге перпендикуляр болатын түзулердің теңдеулерін табу керек.

Жауабы: $5x-3y-25=0$, $5x-3y+9=0$.

2.20. Төртбұрыштың қабырғалары берілген: $x-y=0$; $x+3y=0$; $x-y-4=0$; $3x+y-12=0$. Оның диагональдарының теңдеулерін табу керек. **Жауабы:** $y=0$, $x=3$.

2.21. Төбелері $A(4,6)$, $B(-4,0)$, $C(-1,-4)$ болатын ABC үшбұрышының CM медианасы мен CK биіктігінің теңдеулерін табу керек. **Жауабы:** (CM): $7x-y+3=0$; (CK): $4x+3y+16=0$.

2.22. $P(5,2)$ нүктесінен өтетін: а) координат өстерінен тең кесінділер қиятын; б) Ox өсіне параллель; в) Oy өсіне параллель болатын түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x+y-7=0$; $y=2$; $x=5$.

2.23. $A(-2,3)$ нүктесінен өтетін және Ox өсімен: а) 45°; б) 90°; в) 0° бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x-y+5=0$; $x+2=0$; $y-3=0$.

2.24. $A(-6,-6)$, $B(-3,-1)$ және $C(3,y)$ нүктелері бір түзу бойында жатыр. y-ті табу керек. **Жауабы:** $y=9$.

2.25. $2x-5y-1=0$ мен $x+4y-7=0$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін және $A(4,-3)$ мен $B(-1,2)$ нүктелерінің арасындағы кесіндіні $\lambda=\dfrac{2}{3}$ қатынасындай етіп бөлетін түзудің теңдеуін табу керек. **Жауабы:** $2x-y-5=0$.

2.26. Ромбының екі қабырғасы: $2x-5y-1=0$ мен $2x-5y-34=0$. Оның диагональдарының бірі: $x+3y-6=0$. Екінші диагоналінің теңдеуін табу керек. **Жауабы:** $3x-y-23=0$.

2.27. Төбелері $A(-3,1)$, $B(7,5)$, $C(5,-3)$ болатын үшбұрыш-тың медианаларының қиылысу E нүктесін табу керек.

Жауабы: $E(3,1)$.

2.28. $A(-1,1)$ нүктесінен $2x+3y=6$ түзуіне 45° бұрышпен жүргізілген түзулердің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x-5y+6=0,\quad 5x+y+4=0$.

2.29. ABC үшбұрышының биіктіктерінің теңдеулері: $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ және оның $A(2,3)$ төбесі берілген. Оның AB мен AC қабырғаларының теңдеулерін табу керек.

Жауабы: (AB): $2x-y-1=0$; (AC): $3x+2y-12=0$.

2.30. Параллелограммның екі қабырғасы: $x-2y=0$, $x-y-1=0$ және оның диагональдарының қиылысу нүктесі $M(3,-1)$ берілген. Басқа екі қабырғаларының теңдеулерін табу керек.

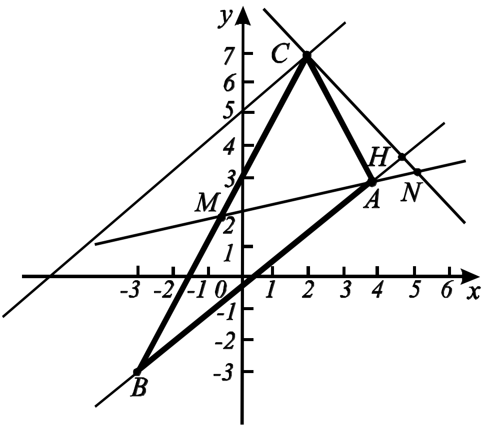
Жауабы: $x-y-7=0,\quad x-2y-10=0$.

2.4–ҮТ орындау үлгісі

№1. ABC үшбұрышының төбелері: $A(4,3)$, $B(-3,-3)$, $C(2,7)$ берілген (48-сурет).

а) AB қабырғасының теңдеуін;
б) CH биіктігінің теңдеуін;
в) AM медианасының теңдеуін;
г) AM медиана мен CH биіктігінің қиылысу нүктесі N;
д) C төбесі арқылы өтетін AB қабырғасына параллель түзу теңдеуін;
е) C төбесінен AB қабырғасына дейінгі қашықтықты
табу керек.

► **а)** Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі бойынша



48-сурет

(§ 2.11, (6) қараңыз) AB қабырғасының теңдеуін аламыз:

$$(AB):\ \frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3},\ \text{немесе } 6(x-4)=7(y-3)$$

$$\text{немесе } 6x-7y-3=0;$$

б) AB түзуінің бұрыштық коэффициенті $k_{AB}=\dfrac{6}{7}$. Шарт бойынша

AB мен CH өзара перпендикуляр, демек, $k_{CH}\cdot k_{AB}=-1,\quad k_{CH}=-\dfrac{7}{6}.$

Енді $C(2,7)$ нүктесі арқылы өтетін және $k_{CH}=-\dfrac{7}{6}$ бұрыштық коэффициент бойынша CH биіктігінің теңдеуін жазамыз (§ 2.11, (3)-формула).

$$(CH):\quad y-7=-\frac{7}{6}(x-2)\ \text{ немесе }\ 7x+6y-56=0.$$

в) BC кесіндісінің ортасы M нүктесінің координаттары (§ 2.4, $(5')$ қараңыз) $x=\dfrac{-3+2}{2}=-\dfrac{1}{2},\quad y=\dfrac{-3+7}{2}=2.$

Екі A және M нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуін жазамыз: $(AM):\quad \dfrac{x-4}{-\frac{1}{2}-4}=\dfrac{y-3}{2-3},\quad 2x-9y+19=0.$

г) AM және CH түзулерінің қиылысу нүктесін табу үшін, келесі теңдеулер жүйесін шешеміз: $\left.\begin{array}{l}7x+6y-56=0,\\ 2x-9y+19=0\end{array}\right\}$. Оның шешімі $N\left(\dfrac{26}{5},\dfrac{49}{15}\right)$ болады.

д) AB қабырғасына параллель түзудің бұрыштық коэффи-циенті $k_{AB}=\dfrac{6}{7}$ тең және ол түзу $C(2,7)$ нүктесі арқылы өтетін-діктен

$$(CD):\quad y-7=\frac{6}{7}(x-2)\quad \text{немесе}\quad 6x-7y+37=0.$$

е) C нүктесін AB түзуіне дейінгі қашықтық § 2.11, (24)-формуласымен есептеледі:

$$d=|CH|=\frac{|6\cdot 2-7\cdot 7-3|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{85}}\approx 4,4.\qquad ◄$$

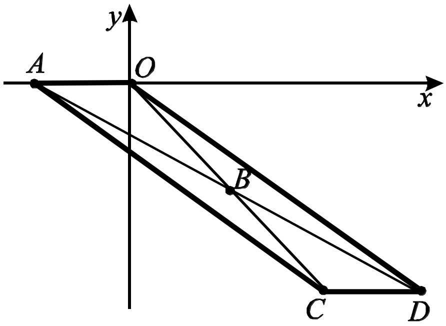
№2. $OACD$ параллелограмының $O(0,0)$ мен $A(-2,0)$ төбелері және оның диагональдарының қиылысу нүктесі $B(2,-2)$ берілген (49-сурет). Параллелограммның қабырғаларының теңдеулерін жазу керек.

► OA қабырғасының теңдеуі $y=0$, өйткені O мен A нүктелерінің координаттары тең және $y=0$;

B нүктесі AD диагоналінің қақ ортасы болғандықтан,

(§ 2.4, ($5'$) қараңыз) $D(x,y)$ нүктесінің координаттары $2=\dfrac{-2+x}{2}$, $-2=\dfrac{0+x}{2}$ немесе $x=6$, $y=-4$.

Енді қалған барлық қабырғалардың теңдеулерін жаза аламыз. OA мен CD параллель болғандықтан, CD қабырғасының теңдеуі: $y=-4$. Ал OD қабырғасының теңдеуін белгілі екі нүкте бойынша табамыз (§ 2.11, (6)-формула) $\dfrac{x-0}{6-0}=\dfrac{y-0}{-4-0}$, немесе $2x+3y=0$.



49-сурет

AC қабырғасынан теңдеуін, оның $A(-2,0)$ нүкте арқылы OD түзуіне параллель өтетіндігін пайдаланып табамыз:

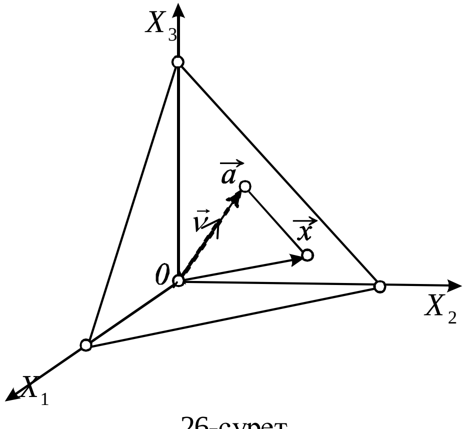
$$y-0=-\frac{2}{3}(x+2) \quad \text{немесе} \quad 2x+3y+4=0. \qquad ◄$$

§ 2.12. Жазықтық теңдеуі

Есеп. Тік бұрышты $OX_1X_2X_3$ декарт координаттар жүйесі анықталған R^3 кеңістігінде $\vec{a}$ радиус-векторы берілген: $|\vec{a}| = p$ және $\vec{a}$ векторының $\vec{v} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ - орты. $\vec{a}$ векторына перпендикуляр және оның ұшы арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

▼ $\vec{a}$ векторының ұшы арқылы, оған перпендикуляр бір ғана жазықтық жүргізуге болатыны белгілі. Жазықтықтың кез келген $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ нүктесінің (радиус-вектордың) $\vec{\text{v}}$ векторына проекциясы p санына тең: $Ï\, ð_{\vec{v}}\vec{x} = |\vec{x}| \cdot \cos\angle(\vec{v}, \vec{x}) = p$ (26-сурет). Бұрыш $0 \le \angle(\vec{v}, \vec{x}) \le \dfrac{\pi}{2}$ болғандықтан $(\vec{x}, \vec{\text{v}}) = |\vec{\text{v}}|\, \Pi p_{\vec{\text{v}}}\vec{x} = p,\ p \ge 0$ немесе

$$(\vec{x}, \vec{\text{v}}) = p, \quad p \ge 0. \tag{1}$$



26-сурет

(1) теңдеуді **жазықтықтың векторлық теңдеуі** деп атайды. Егер оны векторлардың координаттары арқылы жазсақ, онда

$$x_1 \cdot \cos\alpha_1 + x_2 \cdot \cos\alpha_2 + x_3 \cdot \cos\alpha_3 = p\,, \qquad p \ge 0\,. \tag{1'}$$

Бұл – **жазықтықтың нормаль теңдеуі** деп аталады (мұнда

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1) \ . \qquad \blacktriangle$$

Анықтама. *Жазықтықта жатқан кез келген коллинеар емес* $\vec{a}$ *мен* $\vec{b}$ *векторларды осы* ***жазықтықтың бағыттаушы векторлары*** *деп атайды.*

Есеп. ***Бағыттаушы векторлары*** $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ***болатын және*** $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ***нүкте арқылы өтетін жазықтық теңдеуін*** жазу керек.

▼ $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ жазықтықтың кез келген нүктесі болсын. Онда $\vec{x} - \vec{x}^0$ векторы ізделініп отырған жазықтықта жататындықтан, $\vec{x} - \vec{x}^0 = (x_1 - x_1^0,\ x_2 - x_2^0,\ x_3 - x_3^0)$, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ векторлары компланар болады. Олай болса, олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең:

$$(\vec{x} - \overrightarrow{x^0})\vec{a}\vec{b} = 0 \qquad (2)$$

немесе

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & x_2 - x_2^0 & x_3 - x_3^0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2')$$

$(2')$ – **жазықтықтың бағыттаушы векторлар бойынша жазылған теңдеуі** деп аталады. Бұл теңдеуде, жазықтықта жатқан нүкте мен оның бағыттаушы векторлары айқын көрініп тұр. ▲

Мысал. $M_0(1,2,3)$ нүктесі арқылы өтетін $\vec{a}(0,1,2)$ және $\vec{b}(1,0,1)$ векторларына параллель жазықтық теңдеуін жазу керек.

▼ $(2')$ теңдеуіне берілген координаттарды қоямыз:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Анықтауышты 1-ші жол элементтері бойынша жіктейміз:

$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)-(z-3)=0$ немесе $x+2y-z-2=0.$ ▲

$(2')$ -теңдеуден $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\left(x_1-x_1^0\right)+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\left(x_2-x_2^0\right)+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\left(x_3-x_3^0\right)=0$

немесе $A_1=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, $A_2=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$, $A_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ деп белгілеп,

$$A_1\left(x_1-x_1^0\right)+A_2\left(x_2-x_2^0\right)+A_3\left(x_3-x_3^0\right)=0 \qquad (3)$$

түріндегі теңдеу аламыз. Бұл, **жазықтықтың** $\vec{x}^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ **нүкте арқылы өтетін теңдеуі.** Егер мұндағы жақшаларды ашып, бос мүшені B арқылы белгілесек, онда ол мына түрге келеді

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+B=0. \qquad (4)$$

Бұл, **жазықтықтың жалпы теңдеуі** деп аталады.

Жазықтықтың жалпы теңдеуінен нормаль теңдеуге өту үшін, жалпы теңдеуді ***нормальдаушы көбейткіш*** деп аталатын $M=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}$ санына көбейтеді (мұндағы таңба, B санының таңбасына қарама-қарсы етіп алынады (неге?):

$$\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}\cdot x_1+\frac{A_2}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}\cdot x_2+\frac{A_3}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}\cdot x_3=$$

$$=\frac{-B}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}.$$ Бұл теңдеуде

$$\vec{\nu}=\left(\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}},\frac{A_2}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}},\frac{A_3}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}\right),$$

$\vec{x}\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $p=\dfrac{-B}{\pm\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}$ деп белгілеп жазықтықтың векторлық теңдеуіне келеміз: $(\vec{x}, \vec{\nu}) = p.$

Жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі A_1, A_2, A_3 ***коэффициенттері жазықтыққа перпендикуляр*** $\vec{A}$ ***векторының координаттарын көрсетеді.*** Шынында да, (4) теңдеуге парапар (3) теңдеудің сол жағы $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ мен $\vec{x} - \vec{x}^0 = (x_1 - x_1^0,\ x_2 - x_2^0,\ x_3 - x_3^0)$ векторларының скаляр көбейтіндісі: $\left(\vec{A}, \vec{x} - \vec{x}^0\right) = 0.$ Ал $\vec{x} - \vec{x}^0$ – жазықтықта жатқан кез келген вектор. Олай болса, $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ - осы жазықтыққа перпендикуляр вектор. Жазықтыққа перпендикуляр вектор оның **нормалі** деп аталады, демек, $\left(A_1, A_2, A_3\right)$ - жазықтықтың нормалінің координаттары екен.

Ықшамдылық үшін (4) теңдеуді

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (*)$$

түрінде жазып алып, осы $\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығының координат өстері мен координат жазықтықтарына салыстырғандағы орналасу жағдайларын талдайық (A, B, C сандарының бәрі бір мезгілде нөлге тең емес).

1) Егер $D = 0$ тең болса: $Ax + By + Cz = 0,$ онда жазықтық координат бас нүктесі арқылы өтеді (өйткені, (0,0,0) нүктесінің координаттары теңдеуді қанағаттандырады);

2) Егер C=0 болса, онда

$$\alpha: \ Ax + By + D = 0 \qquad (4)$$

жазықтығы Oz өсіне параллель болады. Шынында да, $\vec{n}(A, B, 0)$ - жазықтықтың нормалі және OXY координат жазықтығында жатқан кез келген вектор.

3) Осы сияқты, егер $B = 0$ болса, онда

$$Ax + Cz + D = 0 \qquad (4')$$

жазықтығы Oy өсіне параллель болады.

4) Егер $A = 0$ болса, онда

$$\alpha: \ By + Cz + D = 0 \qquad (4'')$$

жазықтығы Ox өсіне параллель болады.

Соңғы үш жағдайда $D = 0$ болса, жазықтық, сәйкес z, y, x өстері арқылы өтеді.

5) Егер $C = B = 0$ болса, онда

$$Ax + D = 0 \text{ немесе } \quad x = a, \quad a = -\frac{D}{A}, \qquad (5)$$

жазықтығы Oyz координат жазықтығына параллель (яғни x өсіне перпендикуляр), өйткені $\vec{n}(A, 0, 0)$ және $\vec{i}(1, 0, 0)$ – коллинеар векторлар.

6) Осы сияқты, егер $C=A=0$ болса, онда

$$By + D = 0 \quad \text{немесе} \quad y = b \quad \left(b = -\frac{D}{B}\right) \qquad (5')$$

жазықтығы Oxz координат жазықтығына ***параллель***;

7) Егер $A = B = 0$ болса, онда

$$Cz + D = 0 \text{ немесе } \ z = c, \ \left(c = -\frac{D}{C}\right) \qquad (5'')$$

жазықтығы Oxy координат жазықтықтығына ***параллель*** болады.

Жазықтықтың кесінділік теңдеуі. Егер жоғарыдағы (4)-ші $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + B = 0$ теңдеуде $A_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad B \neq 0$ болса, онда теңдеудің екі жағын -B санына бөліп оны

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1, \ \ a_i = -\frac{B}{A_i}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (6)$$

түріне келтіруге болады. (6) – **жазықтықтың кесінділік теңдеуі** деп аталады. Бұл жазықтық x_1 өсін $(a_1, 0, 0)$ нүктесінде, x_2 өсін $(0, a_2, 0)$ нүктесінде, x_3 өсін $(0, 0, a_3)$ нүктесінде қияды.

Есеп. Бір түзудің бойында жатпайтын: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ***үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін*** жазу керек.

▼ Бізге, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін және бағыттаушы векторлары $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$,

$$\vec{b} = \overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0,\ y_2 - y_0,\ z_2 - z_0) \qquad (7)$$

болатын жазықтықтың теңдеуін жазсақ болғаны ($(2')$ қараңыз):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

(8) – берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ***үш нүкте арқылы өтетін жазықтық теңдеуі.***

Мысалы, $M_0(1,1,1)$, $M_1(1,2,3)$, $M_2(3,2,1)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін (8) формуланы пайдаланып жазайық:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 3-1 & 2-1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-2(x-1) + 4(y-1) - 2(z-1) = 0,\ \ x - 2y + z = 0.$$

$M_0(1,1,1)$, $M_1(1,2,3)$, $M_2(3,2,1)$ нүктелерінің координаттары алынған теңдеуді қанағаттандыратынын тексеру қиын емес.

Есеп. Берілген ***екі жазықтық***

$$\alpha_1:\ A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + C = 0,$$

$$\alpha_2:\ B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + D = 0,$$

арасындағы бұрышты табу керек.

▼ $\vec{A}(A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B}(B_1, B_2, B_3)$ векторлары сәйкес α_1 және α_2 жазықтықтарына перпендикуляр болғандықтан, осы екі вектор арасындағы бұрыш берілген екі жазықтық арасындағы бұрышқа тең. Олай болса, $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\varphi$, $(\varphi = \angle \vec{A}_1\vec{A}_2)$, бұдан

$$\cos\varphi = \frac{\vec{A}\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}} \tag{9}$$

аламыз. ▲

(9) формуладан $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ болса, $\cos\varphi = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ болатынын ескеріп, ***екі жазықтықтың перпендикулярлық белгісін*** аламыз:

$$\vec{A}\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0. \tag{10}$$

α_1 және α_2 ***жазықтықтары параллель болуы*** үшін, $\vec{A}$ мен $\vec{B}$ векторлары коллинеар болуы қажетті және жеткілікті:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}. \tag{11}$$

Егер бұған қосымша

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{C}{D} \tag{12}$$

орындалса, онда жоғарыдағы α_1 және α_2 ***жазықтықтары беттеседі***, яғни екі теңдеу бір ғана жазықтықты анықтайды.

Мысалы, $x + 2z - 3 = 0$ және $2x - y + 5 = 0$ жазықтықтары-ның арасындағы бұрыштың косинусын, олардың $\vec{n}_1(1,0,2)$ және $\vec{n}_2(2,-1,0)$ нормальдері арқылы (9) формуланы қолданып табуға болады: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \dfrac{1\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 2\cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \dfrac{2}{5}.$

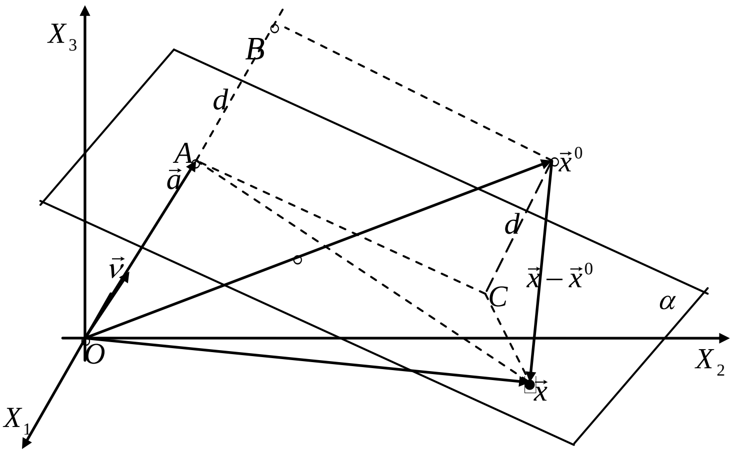
Есеп. Берілген $\vec{x}^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ нүктесінен $\alpha: A_1x_1 + A_2x_2 + {}$ $+A_3x_3 + B = 0$ **жазықтығына дейінгі қашықтықты табу керек** (27-сурет).

▼ Жазықтықтың жалпы теңдеуін векторлық (нормаль) теңдеуге келтіреміз: $(\vec{x}, \vec{\nu}) = p,\ p \geq 0,$ мұнда

$$\vec{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right),\ \vec{v}=\frac{\left(A_1,A_2,A_3\right)}{\pm\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+A_3^{\ 2}}},\ p=\frac{-B}{\pm\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+A_3^{\ 2}}}.$$

Ізделініп отырған d қашықтық $\vec{x}^0$ нүктесінен ($\vec{x}^0$ радиус-векторының ұшынан) α жазықтығына түсірілген перпендиуляр ұзындығына тең, ал ол α жазықтығының кез келген $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ нүктесі мен берілген $\vec{x}^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ нүктесінің айырымы $\vec{x}-\vec{x}^0$ векторының $\vec{\mathrm{v}}$ векторына проекциясының абсолют шамасын көрсетеді: $d=\left|\Pi p_{\vec{\mathrm{v}}}(\vec{x}-\vec{x}^0)\right|=\left|\left|\vec{\mathrm{v}}\right|\Pi p_{\vec{\mathrm{v}}}(\vec{x}-\vec{x}^0)\right|=\left|(\vec{x}-\vec{x}^0,\vec{\mathrm{v}})\right|=$

$$=\left|(\vec{x},\vec{\mathrm{v}})-(\vec{x}^0,\vec{\mathrm{v}})\right|=\left|p-(\vec{x}^0,\vec{\mathrm{v}})\right|=\left|(\vec{x}^0,\vec{\mathrm{v}})-p\right|. \qquad (13)$$



27-сурет

Бұл теңдікті векторлардың координаттары арқылы жазып $\vec{x}^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ **нүктесінен** $\alpha: A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+B=0$ **жазықтығына дейінгі қашықтық формуласын аламыз**

$$d=\frac{\left|A_1x_1^0+A_2x_2^0+A_3x_3^0+B\right|}{\sqrt{A_1+A_2+A_3}}. \qquad (14)$$

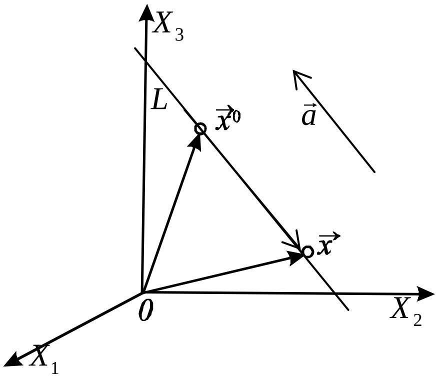
▲

Суреттен, егер $\vec{x}^0$ мен $0(0,0,0)$ нүктелері α жазықтығының екі жағында жатса, онда $\angle(\vec{x}-\vec{x}^0,\vec{v})$ доғал бұрыш болады және $(\vec{x}^0,\vec{v})>p$ немесе $(\vec{x}^0,\vec{v})-p>0$ аламыз, ал $\vec{x}^0$ және $0(0,0,0)$ нүктелері α жазықтығының бір жағында жатса, онда $\angle(\vec{x}-\vec{x}^0,\vec{v})$ – сүйір бұрыш болады да $(\vec{x}^0,\vec{v})<p$ немесе $(\vec{x}^0,\vec{v})-p<0$ аламыз.

Мысал. $\vec{x}^0(1,1,1)$ нүктесінен $\alpha: \ x+2y+z-9=0$ жазықтығына дейінгі қашықтық $d=\dfrac{|1+2\cdot 1+1-9|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}}$ тең.

§ 2.13. Кеңістіктегі түзу

Есеп. $\vec{x}^0(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ нүктесі арқылы өтетін және берілген $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ векторына параллель түзудің теңдеуін жазу керек (28-сурет).



28-сурет

▼ $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ – түзудің кез келген нүктесі болсын. Онда, түзуде жатқан $\vec{x}-\vec{x}^0=\left(x_1-x_1^0,x_2-x_2^0,x_3-x_3^0\right)$ векторы мен $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$

векторы коллинеар болғандықтан

$$\vec{x}-\vec{x}^{0}=t\vec{a},\ \ -\infty<t<+\infty \tag{1}$$

теңдігін аламыз. Мұндағы параметр t-нің әрбір мәні түзудің әрбір $\vec{x}$ нүктесіне сәйкес алынады. Бұл - $\vec{x}^{0}(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ *нүктесі арқылы өтетін, $\vec{a}$ векторына параллель кеңістіктегі түзудің* **векторлық теңдеуі** деп аталады.

(1) теңдеудегі векторлардың координаттары бойынша, келесі үш теңдеу жүйесін алуға болады:

$$\begin{cases} x_1-x_1^0=ta_1, \\ x_2-x_2^0=ta_2, \\ x_3-x_3^0=ta_3, \quad -\infty<t<+\infty. \end{cases} \tag{1$'$}$$

(1′) теңдеуді – *кеңістіктегі түзудің* **параметрлік теңдеуі** деп атайды.

Ал $\vec{x}-\vec{x}^{0}=\left(x_1-x_1^0,\ x_2-x_2^0,\ x_3-x_3^0\right)$ мен $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ векторларының басқа бір коллинеарлық белгісін пайдаланып, **түзудің канондық (дағдылы) теңдеуі** деп аталатын теңдеуді алуға болады

$$\frac{x_1-x_1^0}{a_1}=\frac{x_2-x_2^0}{a_2}=\frac{x_3-x_3^0}{a_3},\quad a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0, \tag{1$''$}$$

Мұндағы $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ векторын L **түзуінің бағыттаушы векторы** деп атайды.

Салдар. $M_1\left(x_1^0,y_1^0,z_1^0\right)$ және $M_2\left(x_2^0,y_2^0,z_2^0\right)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі келесі түрде жазылатынын тексеріңіздер:

$$\frac{x-x_1^0}{x_2^0-x_1^0}=\frac{y-y_1^0}{y_2^0-y_1^0}=\frac{z-z_1^0}{z_2^0-z_1^0}. \tag{*}$$

Мысалы, $A(2,-3,6)$ және $B(-4,3,7)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуі $\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y+3}{3+3}=\frac{z-6}{7-6}$ немесе

$$\frac{x-2}{-6}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-6}{1}.$$

Назар аударыңыз! (1′) немесе (1″) теңдеулерінен екі мәлімет алуға болады. Түзу:

1) $\vec{x}^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ нүктесі арқылы өтеді;

2) $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ векторына параллель.

Ескерту: a_1, a_2, a_3 сандарының біреуі немесе екеуі нөлге тең болуы мүмкін.

1-мысал.
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{2} \qquad (2)$$
теңдеулері, (1,2,3) нүктесі арқылы өтетін, бағыттаушы векторы $\vec{a}(1,0,2)$ болатын түзуді анықтайды. Бұл теңдеулерді оларға эквивалентті келесі екі теңдеу жүйесімен ауыстыруға болады:

$$\begin{cases} y-2=0\cdot(x-1), \\ 2(x-1)=z-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ z=2x+1. \end{cases} \qquad (2')$$

(2′) түзуі – $y=2$ және $z=2x+1$ жазықтықтарының қиылысуынан шығатын түзу.

2-мысал. Түзудің $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{0}$ канондық теңдеуін $\begin{cases} y-2=0, \\ z-3=0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесімен ауыстыруға болады.

Егер келесі екі жазықтық қиылысса:

$$A_1x+A_2y+A_3z+C=0, \qquad (3)$$

$$B_1x+B_2y+B_3z+D=0, \qquad (4)$$

онда бұл теңдеулер жүйесін *кеңістіктегі түзудің* **жалпы теңдеуі** деп атайды.

Бұл теңдеулердегі белгісіздердің сәйкес коэффициенттері пропорционал $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}$ болса – (3) пен (4) жазықтықтар өзара параллель, ал коэффициенттеріне қоса бос мүшелері де пропорционал $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}=\frac{C}{D}$ болса, онда (3) пен (4) жазықтықтар беттесетіні белгілі (2.12п. (11),(12)).

Сондықтан, (3) пен (4) жазықтықтар түзу бойымен қиылысуы үшін, теңдеулердегі белгісіздердің сәйкес коэффициенттері *пропорционал емес* болуы қажет. Бұл жағдай орындалуы үшін $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}$ анықтауыштарының ең болмағанда біреуі нөлге тең емес болса болғаны. Анықтылық үшін $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ деп алып (3),(4) теңдеулерді x пен y-ке (базистік белгісіздер) қатысты шешсек, $\begin{cases} x=\alpha z+\mu \\ y=\beta z+\nu \end{cases}$ (α, β, μ, ν – қандай да бір сандар) аламыз. Алынған теңдеулерді z -ке қатысты шешіп,

$$\frac{x-\mu}{\alpha}=\frac{y-\nu}{\beta}=\frac{z}{1} \qquad (5)$$

түріндегі ***түзудің канондық теңдеуін*** аламыз. Біз мұнда кеңіс-тіктегі ***түзудің жалпы теңдеуінен канондық теңдеуге өтудің*** бір тәсілін ғана көрсеттік.

3-мысал. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ теңдеулерімен Оz өсі анықталатындығы белгілі. Бұған келесі жолмен де келуге болады:

$$\begin{cases} x = 0 \cdot z \\ y = 0 \cdot z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

Бұл – $0(0,0,0)$ нүктесі арқылы өтетін, бағыттаушы векторы $\vec{k}$ (0,0,1) болатын түзу, яғни Oz өсі.

4-мысал. $M_0(-1,0,3)$ нүктесі арқылы өтетін $\alpha: 2x - y + 6 = 0$ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін жазу керек.

▼ α жазықтығының нормалі $\vec{n}(2,-1,0)$ – ізделініп отырған түзудің бағыттаушы векторы: $\vec{a} = \vec{n}.$ Сондықтан $(1'')$ формуланы пайдаланып, түзудің канондық теңдеуін келесі түрде жаза аламыз: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-3}{0}.$ Ал оның параметрлік теңдеуі осы теңдеулердің әрбір мүшесін t-ға теңестіру арқылы алынады: $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -t, \\ z = 3. \end{cases}$

Түзудің бағыттаушы $\vec{a}$ (2, -1, 0) векторы z өсіне перпендикуляр екенін көреміз, өйткені $\left(\vec{a}, \vec{k}\right) = 0.$ ▲

Келесі теңдеулермен берілген

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}, \tag{6}$$

$$\frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3} \tag{7}$$

түзулердің арасындағы φ **бұрышы,** олардың сәйкес $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ және $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ бағыттаушы векторларының арасындағы бұрышқа $\varphi = (\angle \vec{a}, \vec{b})$ тең болатындықтан

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{8}$$

(8) теңдіктен ***екі түзудің перпендикулярлық белгісін:***

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \tag{9}$$

және $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ бағыттаушы векторларының коллинеарлығы арқылы ***екі түзудің параллельдік белгісін***:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \tag{10}$$

жаза аламыз.

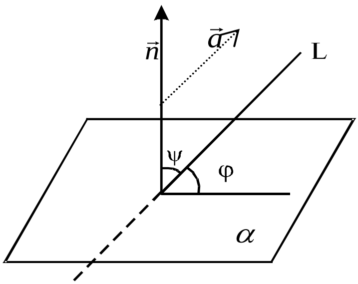
5-мысал. $L_1: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + t \\ z = 3t. \end{cases}$ және $L_2: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-4}{3}$

түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табу керек.

▼ L_1 түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{a}(2,1,3)$, ал L_2 түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{b}(1,-2,3)$ болғандықтан, (8) формула бойынша,

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 3\cdot 3}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{9}{14}. \quad ▲$$

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы мен $L: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ түзуінің арасындағы φ бұрышын табу үшін, α жазықтығының $\vec{n}(A,B,C)$ нормалі мен L түзуінің $\vec{a}(l,m,n)$ бағыттаушы векторы арасындағы $\prec\psi = \prec(\vec{n},\vec{a})$ бұрыштың косинусына табуға болады (29-сурет). Өйткені,



29-сурет

$\sin\varphi = \cos\angle\left(\vec{n},\vec{a}\right) = \cos\psi,$ демек

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{11}$$

(11) формуладан:

а) түзу мен жазықтықтың ***перпендикулярлық белгісін:***

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}; \tag{12}$$

б) түзу мен жазықтықтың ***параллельдік белгісін:***

$$A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n = 0 \tag{13}$$

түрлерінде жазуға болатынын көреміз.

Егер (13) шартпен бірге $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ теңдігі орындалса, онда L түзуі α жазықтығында жатады.

6-мысал. $L:\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 3 + t \end{cases}$ түзуі мен $\alpha: x + 3y - z + 6 = 0$ жазықтығының: **а)** ***арасындағы бұрыштың синусын***;

б) ***қиылысу нүктесін*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$

табу керек.

▼ **а)** L түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{a} = (2,-1,1),$ ал α жазықтығының нормалі $\vec{n} = (1;3;-1).$ Сондықтан (11) бойынша

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-2}{\sqrt{66}};$$

б) L түзуімен α жазықтығының қиылысу нүктесі олардың теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде ізделеді

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 3 + t \\ x + 3y - z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 3 + t \\ 2 + 2t - 3 - 3t - 3 - 3t + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1, \\ x=2+2\cdot 1, \\ y=-1-1, \\ z=3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=4, \qquad y=-2, \qquad z=4\,.$$

Жауабы: $M_0(4; -2; 4)$ ▲

Тақырыпқа арналған сұрақтар мен тапсырмалар

1. ***Жазықтықтың векторлық теңдеуін*** қорытып шығарыңыз.
2. ***Жазықтықтың нормаль теңдеуін*** жазыңыз.
3. ***Жазықтықтың жалпы теңдеуін*** жазыңыз. Нормальдаушы көбейткіш деген не және жазықтықтың берілген жалпы теңдеуі-нен нормаль теңдеуге қалай өтуге болады? Мысал келтіріңіз.

4. Жазықтықтың жалпы теңдеуінің коэффициенттеріне байланысты дербес жағдайларын қарастырыңыз.

5. Берілген нүкте арқылы өтетін жазықтықтың жалпы теңдеуін жазыңыз және оның коэффициенттерінің геометриялық мағы-насын түсіндіріңіз.

6. ***Жазықтықтың кесінділік теңдеуін*** жазыңыз. Жазықтықтың берілген жалпы теңдеуінен кесінділік теңдеуге және керісінше өту жағдайларын мысал арқылы түсіндіріңіз.

7. Бір түзудің бойында жатпайтын ***үш нүкте арқылы өтетін жазықтық теңдеуін*** жазыңыз. Мысал келтіріңіз.

8. Жалпы теңдеулермен берілген екі жазықтықтың арасындағы бұрышты табу формуласын қорытып шығарыңыз. Екі жазық-тықтың параллельдік, перпендикулярлық белгілерін тұжырым-даңыз.

9. Берілген нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықтың форму-ласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.

10. ***Кеңістіктегі түзудің векторлық және параметрлік теңдеу-лерін*** қорытып шығарыңыз.

11. Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуін жазыңыз және осы теңдеудің параметрлерінің геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.

12. Кеңістіктегі берілген екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуін қорытып шығарыңыз.

13. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуін жазыңыз. Кеңістіктегі түзудің берілген жалпы теңдеуінен канондық теңдеуге және керісінше қалай өтуге болады? Мысал келтіріңіз.

14. Канондық теңдеулермен берілген екі түзу арасындағы бұрышты табу формуласын қорытып шығарыңыз. Кеңістіктегі екі түзудің перпендикулярлық, параллельдік белгілерін тұжырымдаңыз.

2.5-ҮТ

1. Төрт нүкте берілген: $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$.

а) $A_1A_2A_3$ жазықтығының;

ә) A_1A_2 түзуінің;

б) $A_1A_2A_3$ жазықтығына перпендикуляр A_4M түзуінің;

в) A_1A_2 түзуіне параллель A_3N түзуінің;

г) A_4 нүктесі арқылы өтетін, A_1A_2 түзуіне перпендикуляр жазықтықтың

теңдеулерін жазу керек;

д) A_1A_4 түзуі мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын;

е) *Oxy* координат жазықтығы мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын

табу керек.

1.1. $A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,6,1)$, $A_3(-1,1,6)$, $A_4(0,4,-1)$.

1.2. $A_1(3,-1,2)$, $A_2(-1,0,1)$, $A_3(1,7,3)$, $A_4(8,5,8)$.

1.3. $A_1(3,5,4)$, $A_2(5,8,3)$, $A_3(1,2,-2)$, $A_4(-1,0,2)$.

1.4. $A_1(2,4,3)$, $A_2(1,1,5)$, $A_3(4,9,3)$, $A_4(3,6,7)$.

1.5. $A_1(9,5,5)$, $A_2(-3,7,1)$, $A_3(5,7,8)$, $A_4(6,9,2)$.

1.6. $A_1(0,7,1)$, $A_2(2,-1,5)$, $A_3(1,6,3)$, $A_4(3,-9,8)$.

1.7. $A_1(5,5,4)$, $A_2(1,-1,4)$, $A_3(3,5,1)$, $A_4(5,8,-1)$.

1.8. $A_1(6,1,1)$, $A_2(4,6,6)$, $A_3(4,2,0)$, $A_4(1,2,6)$.

1.9. $A_1(7,5,3)$, $A_2(9,4,4)$, $A_3(4,5,7)$, $A_4(7,9,6)$.

1.10. $A_1(6,8,2)$, $A_2(5,4,7)$, $A_3(2,4,7)$, $A_4(7,3,7)$.

1.11. $A_1(4,2,5)$, $A_2(0,7,1)$, $A_3(0,2,7)$, $A_4(1,5,0)$.

1.12. $A_1(4,4,10)$, $A_2(7,10,2)$, $A_3(2,8,4)$, $A_4(9,6,9)$.

1.13. $A_1(4,6,5)$, $A_2(6,9,4)$, $A_3(2,10,10)$, $A_4(7,5,9)$.

1.14. $A_1(3,5,4)$, $A_2(8,7,4)$, $A_3(5,10,4)$, $A_4(4,7,8)$.

1.15. $A_1(10,9,6)$, $A_2(2,8,2)$, $A_3(9,8,9)$, $A_4(7,10,3)$.

1.16. $A_1(1,8,2)$, $A_2(5,2,6)$, $A_3(5,7,4)$, $A_4(4,10,9)$.

1.17. $A_1(6,6,5)$, $A_2(4,9,5)$, $A_3(4,6,11)$, $A_4(6,9,3)$.

1.18. $A_1(7,2,2)$, $A_2(-5,7,-7)$, $A_3(5,-3,1)$, $A_4(2,3,7)$.

1.19. $A_1(8,-6,4)$, $A_2(10,5,-5)$, $A_3(5,6,-8)$, $A_4(8,10,7)$.

1.20. $A_1(1,-1,3)$, $A_2(6,5,8)$, $A_3(3,5,8)$, $A_4(8,4,1)$.

1.21. $A_1(1,-2,7)$, $A_2(4,2,10)$, $A_3(2,3,5)$, $A_4(5,3,7)$.

1.22. $A_1(4,2,10)$, $A_2(1,2,0)$, $A_3(3,5,7)$, $A_4(2,-3,7)$.

1.23. $A_1(2,3,5)$, $A_2(5,3,-7)$, $A_3(1,2,7)$, $A_4(4,2,0)$.

1.24. $A_1(5,3,7)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(4,2,10)$, $A_4(1,2,7)$.

1.25. $A_1(4,3,5)$, $A_2(1,9,7)$, $A_3(0,2,0)$, $A_4(5,3,10)$.

1.26. $A_1(3,2,5)$, $A_2(4,0,6)$, $A_3(2,6,5)$, $A_4(6,4,-1)$.

1.27. $A_1(2,1,6)$, $A_2(1,4,9)$, $A_3(2,-5,8)$, $A_4(5,4,2)$.

1.28. $A_1(2,1,7)$, $A_2(3,3,6)$, $A_3(2,-3,9)$, $A_4(1,2,5)$.

1.29. $A_1(2,-1,7)$, $A_2(6,3,1)$, $A_3(3,2,8)$, $A_4(2,-3,7)$.

1.30. $A_1(0,4,5)$, $A_2(3,-2,1)$, $A_3(4,5,6)$, $A_4(3,3,2)$.

2

2.1. $M\left(-2,7,3\right)$ нүктесі арқылы өтетін және $x-4y+5z-1=0$ жазықтығына параллель жазықтығынан координаттар өстерінде қиылған кесінділердің шамаларын табу керек.

Жауабы: $(-15, \frac{15}{4}, -3\ )$

2.2. M_1M_2 кесіндісінің қақ ортасы арқылы өтетін осы кесіндіге перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазу керек. Мұнда $M_1(1,5,6)$, $M_2(-1,7,10)$. **Жауабы:** $x-y-2z+22=0$.

2.3. $M(2,0,-0,5)$ нүктесінен $4x-4y+2z+17=0$ жазықтығы-на дейінгі қашықтықты табу керек. **Жауабы:** $d=4$.

2.4. $A(2,-3,5)$ нүктесі арқылы өтетін OXY жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $z-5=0$.

2.5. OX өсі және $A(2,5,-1)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық-тың теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $y+5z=0$.

2.6. $A(2,5,-1)$, $B(-3,1,3)$ нүктелері арқылы өтетін OY өсіне параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $4x+5z-3=0$).

2.7. $A(3,4,0)$ нүктесі арқылы және $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$ түзуі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $y-z-4=0$.

2.8. Параллель $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ және $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ екі түзу арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x+2y-2z-1=0$.

2.9. OX өсі және $A(3,2,-5)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық пен $3x-y-7z+9=0$ жазықтығының қиылысуынан құралған түзудің жалпы теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $3x-y-7z+9=0,\ 5y+2z=0$.

2.10. $M(6,-10,1)$ нүктесінен өтетін, Ox өсінде $a=-3$ кесіндісін, ал Oz өсінде $c=2$ кесіндісін қиятын жазықтықтың кесінділік теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$.

2.11. $A(2,3,-4)$ нүктесінен өтетін, $\mathbf{a}=(4,1,-1)$ және $\mathbf{b}=(2,-1,2)$ векторларына параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x-10y-6z+4=0$.

2.12. $A(1,1,0), B(2,-1,-1)$ нүктелерінен өтетін $5x+2y+3z-7=0$ жазықтығына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x+2y-3z-3=0$.

2.13. Координат басынан өтетін, келесі екі жазықтыққа: $2x-3y+z-1=0$, $x-y+5z+3=0$ перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $14x+9y-z=0$.

2.14. $A(3,-1,2)$, $B(2,1,4)$ нүктелерінен өтетін **a** $=(5,\text{-}2\,\text{-}1)$ векторына параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $2x+9y-8z+19=0$.

2.15. Координаттар басынан өтетін **AB** векторына (мұнда **A**$(5,\text{-}2,3)$, **B**$(1,\text{-}3,5)$) перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $4x+y-2z=0$.

2.16. $3x+y-3z=0$ жазықтығына параллель және $M(2,-3,3)$ нүктесінен өтетін жазықтықтың координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу керек. **Жауабы:** $-2,-6,2$.

2.17. $M_1(2\ ,\ -3\ ,)$ $M_2(-1,2,-3)$ нүктелерін қосатын M_1M_2 кесіндісіне перпендикуляр және $M(1,-1,2)$ нүктесінен өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $3x+y-z=0$.

2.18. $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-3}{-8}=\dfrac{z-1}{-9}$ түзуі $x+3y-2z+1=0$ жазықтығына параллель екенін, ал $x=t+7$, $y=t-2$, $z=2t+1$ түзуі осы жазықтықта жататынын дәлелдеу керек.

2.19. $A(3,-4,1)$ нүктесінен өтетін OXZ координат жазық-тығына параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $y+4=0$.

2.20. OY өсінен және $M(3,-5,2)$ нүктесінен өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $2x-3z=0$.

2.21. $M(1,2,3)$ және $N(-3,4,-5)$ нүктелерінен өтетін Oz өсіне параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x+2y-5=0$.

2.22. $M(2,3,-1)$ нүктесі және $x=t-3,\ \ y=2t+5,\ \ z=-3t+1$ түзуі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $10x+13y+12z-47=0$.

2.23. $M(4,-3,1)$ нүктесінің $x-2y-z-15=0$ жазықтығындағы проекциясын табу керек. **Жауабы:** $M_1(5,-5,0)$.

2.24. B-ның қандай мәнінде $x-4y+z-1=0$ және $2x+By+10z-3=0$ жазықтықтары өзара перпендикуляр болады?

Жауабы: $B=3$.

2.25. $M(2,-3,-4)$ нүктесінен өтетін және әрбір координат өсінен шамалары бірдей кесінділер қиятын жазықтық теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x+y+z+5=0$.

2.26. n мен A-ның қандай мәндерінде $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ түзуі $Ax+2y-2z-7=0$ жазықтығына перпендикуляр болады?

Жауабы: $A=-1,\quad n=-6$.

2.27. $A(2,3,-1)$, $B(1,1,4)$ нүктелері арқылы өтетін $x-4y+3z+2=0$ жазықтығына перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $7x+4y+3z-23=0$.

2.28. Координаттар басы арқылы өтетін, $x+5y-z+7=0$ және $3x-y+2z-3=0$ жазықтықтарына перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $9x-5y-16z=0$.

2.29. $M(2,\ 3,-5)$ және $N(-1,\ 1,\ -6)$ нүктелерінен өтетін $\mathbf{a}=(4,4,3)$ векторына параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $2x-5y+4z+31=0$.

2.30. C-ның қандай мәнінде $3x-5y+Cz-3=0$ мен $x-3y+2z+5=0$ жазықтықтары өзара перпендикуляр болады?

Жауабы: $C=-9$.

3.

3.1. $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ түзуі мен $\begin{cases} x-2y+2z-8=0, \\ x-6z-6=0 \end{cases}$ түзуінің параллельдігін дәлелдеу керек.

3.2. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ түзуінің $2x+y-z=0$ жазықтығына параллель болатынын, ал $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ түзуінің осы жазық-тықта жататынын дәлелдеу керек.

3.3. $M(1,-3,3)$ нүктесінен өтетін және координат өстерімен сәйкес 60°, 45° және 120° бұрыштар жасайтын түзу теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{\sqrt{2}}=\frac{z-3}{-1}$.

3.4. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-6}$ түзуі $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$ түзуіне перпендикуляр болатынын дәлелдеу керек.

3.5. Төбелері $A(3,6,-7)$, $B(-5,1,-4)$, $C(0,2,3)$ болатын үшбұрыштың C төбесінен жүргізілген медианасының теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $x=2t,\ y=-3t+2,\ z=17t+3.$

3.6. n-нің қандай мәнінде $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{1}$ түзуі $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ түзуіне параллель болады? **Жауабы:** $n=-2$.

3.7. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ түзуі мен $2x+3y+z-1=0$ жазықтығының қиылысу нүктесін табу керек. **Жауабы:** $M(2,-3,6)$.

3.8. $P(3,1,-1)$ нүктесінің $x+2y+3z-30=0$ жазықтығындағы проекциясын табу керек. **Жауабы:** $P_1(5,5,5)$.

3.9. C-ның қандай мәнінде $3x-5y+Cz-3=0$ мен $x+3y+2z+5=0$ жазықтықтары өзара перпендикуляр болады?

Жауабы: $C=6$.

3.10. ***A***-ның қандай мәнінде $Ax+3y-5z+1=0$ жазықтығы $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ түзуіне параллель болады? **Жауабы:** $A=-1$.

3.11. m мен C-ның қандай мәндерінде $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ түзуі $3x-2y+Cz+1=0$ жазықтығына перпендикуляр болады?

Жауабы: $m=-6, \quad C=1{,}5$.

3.12. Координат басынан өтетін және $x=2t+5, \quad y=-3t+1,$ $z=-7t-4$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-7}$.

3.13. $A(0,0,2), \quad B(4,2,5), \quad C(12,6,11)$ нүктелері бір түзуде жата ма? **Жауабы:** жатады.

3.14. $M(2,-5,3)$ нүктесінен өтетін және $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x-2}{-11}=\frac{y+5}{17}=\frac{z-3}{13}$.

3.15. $M(2,-3,4)$ нүктесінен өтетін және $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ мен $\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-3}$ түзулеріне перпендикуляр түзудің теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{3}$.

3.16. A мен B-ның қандай мәндерінде $Ax+By+6z-7=0$ жазықтығы $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$ түзуіне перпендикуляр болады?

Жауабы: $A=4, \quad B=-8$.

3.17. $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z-1}{-9}$ түзуі $x+3y-2z+1=0$ жазықтығына параллель болатынын, ал $x=t+7, \quad y=t-2, \quad z=2t+1$ түзуі осы жазықтықта жататынын көрсету керек.

3.18. Oz өсі және $K(-3,1,-2)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $x+3y=0$.

3.19. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ түзуі мен $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\ 2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ түзуі өзара перпендикуляр болатынын көрсету керек.

3.20. D-ның қандай мәнінде $\begin{cases}3x-y+2z-6=0,\\ x+4y-z+D=0\end{cases}$ түзуі Oz өсін қияды? **Жауабы:** $D=3$.

3.21. p-ның қандай мәнінде $\begin{cases}x=2t+5,\\ y=-t+2,\\ z=pt-7\end{cases}$ түзуі мен $\begin{cases}x+3y+\ z+2=0,\\ x-\ y-3z-2=0\end{cases}$ түзуі өзара параллель болады? **Жауабы:** $p=1$.

3.22. $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ түзуі мен $3x-y+2z-8=0$ жазықтығының қиылысу нүктесін табу керек. **Жауабы:** $M(2,0,1)$.

3.23. $K(2,-5,3)$ нүктесінен өтетін және Oxy жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $y+5=0$.

3.24. Oy өсі және $M(5,3,2)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың $x+2y-z+5=0$ жазықтығымен қиылысу түзуінің жалпы теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $x+2y-z+5=0,\quad 2x-5z=0$.

3.25. B мен D-ның қандай мәндерінде $x-2y+z-9=0$, $3x+By+z+D=0$ түзуі Oxy жазықтығында жатады?

Жауабы: $B=-6,\quad D=-27$.

3.26. $M_0(2,3,3)$ нүктесінен өтетін және $\mathbf{a}=(-1,-3,1)$ мен $\mathbf{b}=(4,1,6)$ векторларына параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $19x-10y-11z+25=0$.

3.27. $E(3,4,5)$ нүктесінен өтетін және Ox өсіне параллель түзудің теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z-5}{0}$.

3.28. $M(2,3,1)$ нүктесінен өтетін және $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ түзуіне перпендикуляр түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

3.29. $M(1,-5,3)$ нүктесінен өтетін және $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$ мен $x=3t+1, \quad y=-t-5, \quad z=2t+3$ түзулеріне перпендикуляр түзудің канондық теңдеуін жазу керек. **Жауабы:** $\frac{x-1}{5}=\frac{y+5}{-7}=\frac{z-3}{-11}$.

3.30. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$ түзуімен салыстырғанда $M(4,3,10)$ нүктесіне симметриялы болатын нүктені табу керек.

Жауабы: $M_1(2,9,6)$.

2.5-ҮТ орындау үлгісі

№1. Төрт нүкте берілген: $A_1(4, 7, 8)$, $A_2(-1, 13, 0)$, $A_3(2, 4, 9)$, $A_4(1, 8, 9)$.

а) $A_1A_2A_3$ жазықтығының;

ә) A_1A_2 түзуінің;

б) $A_1A_2A_3$ жазықтығына перпендикуляр A_4M түзуінің;

в) A_1A_2 түзуіне параллель A_3N түзуінің теңдеуін құру керек;

г) A_4 нүктесі арқылы өтетін, A_1A_2 түзуіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеулерін жазу керек;

д) A_1A_4 түзуі мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын;

е) Oxy координат жазықтығы мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының арасындағы бұрыштың косинусын табу керек.

▼ **а)** § 2.12, (8)–формуланы пайдалана отырып, $A_1A_2A_3$

жазықтығының теңдеуін құрамыз: $\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ бұдан

$(A_1 A_2 A_3):\ \ 6x-7y-9z+97=0$ аламыз.

ә) Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуін § 2.13, $(1'')$–пайдаланып, A_1A_2 түзуінің теңдеуін келесі түрде жаза аламыз: (A_1A_2): $\frac{x-4}{5}=\frac{y-7}{-6}=\frac{z-8}{8}$;

б) Есеп шартынан A_4M түзуінің бағыттаушы $\vec{s}$ векторы ретінде $A_1 A_2 A_3$ жазықтығының нормаль $\vec{n}\left(6;-7;-9\right)$ векторын алуға болады. Онда A_4M түзуінің теңдеуі келесі түрде жазылады (A_4M): $\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-9}$; (§ 2.13, 4-мысалды қараңыз).

в) A_3N түзуі $A_1 A_2$ түзуіне параллель болғандықтан, олардың $\vec{s}_1$ және $\vec{s}_2$ бағыттаушы векторлары коллинеар болады: $\vec{s}_1=\vec{s}_2=\left(5;-6;8\right)$. Демек A_3N түзуінің теңдеуі келесі түрде жазылады: (A_3N): $\frac{x-2}{5}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z-9}{8}$;

г) $A_1 A_2$ түзуінің бағыттаушы векторы $\left(5;-6;8\right)$, ізделінетін жазықтықтың нормаль векторы болатындықтан **§ 2.12.** $(2')$ теңдеуді пайдаланамыз: $5\left(x-1\right)-6\left(y-8\right)+8\left(z-9\right)=0$ немесе $5x-6y+8z-29=0$

д) A_1A_4 түзуінің бағыттаушы векторы: $s_3=\overrightarrow{A_1A_4}=\left(-3,1,1\right)$. Ал A_1A_4 түзуі мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының арасындағы φ бұрышының синусы осы $\vec{s}_3$ векторы мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының нормалі **n** $\left(6,-7,-9\right)$ арасындағы ψ бұрышының косинусына тең. (§ 2.13, 11-формула).

Олай болса, $\sin\varphi = |\cos\psi| = \dfrac{\left|\vec{s_3}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{s_3}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|} =$

$$= \frac{\left|-3\cdot 6+1\cdot(-7)+1\cdot(-9)\right|}{\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} = \frac{34}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{166}} \approx 0{,}8;$$

е) OXY жазықтығының $\vec{k}(0,0,1)$ нормалі мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының $\vec{n}(6,-7,-9)$ нормалі арасындағы бұрыштың косинусын табамыз: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{k}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{k}\right|\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{0\cdot 6+0\cdot(-7)+1\cdot(-9)}{\sqrt{1}\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} = \dfrac{-9}{\sqrt{166}} \approx -0{,}7.$ ▲

2. $M(4,3,1)$ және $N(-2,0,-1)$ нүктелері арқылы өтетін, $A(1,1,-1)$ мен $B(-3,1,0)$ нүктелері арқылы жүргізілген түзуге параллель жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

►AB түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{AB} = (-3-1, 1-1, 0-(-1)) = (-4,0,1)$;

$P(x,y,z)$ жазықтықтың кез келген нүктесі болсын. Онда есеп шарты бойынша $\vec{MP} = (x-4,\ y-3,\ z-1)$, $\vec{MN} = (-6,-3,-2)$ және $\vec{AB} = (-4,0,1)$ – компланар векторлар болады, сондықтан келесі теңдікті жазуға болады: $\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-1 \\ -6 & -3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ Анықтауышты бірінші жол элементтері бойынша жіктейміз:

$-3(x-4)+14(y-3)-12(z-1)=0$ немесе

$3x-14y+12z+18=0.$ ◄

3. $x+y+z-3=0$ жазықтығымен салыстырғанда $M_1(6,-4,-2)$ нүктесіне симметриялы $M_2(x_2,y_2,z_2)$ нүктесінің координаттарын табу керек.

► M_1M_2 түзуі берілген жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан, осы жазықтықтың $\vec{n}(1,1,1)$ нормалі түзудің бағыттаушы векторының рөлін атқарады. Олай болса, M_1M_2 түзуінің канондық теңдеуі $\frac{x-6}{1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+2}{1}$, ал оның параметрлік теңдеуі $x-6=t,$ $y+4=t,$ $z+2=t$ болады (§ 2.13, (1′) және (1″) қараңыз). Енді M_1M_2 түзуі мен $x+y+z-3=0$ жазықтығының қиылысу нүктесін табу үшін алынған x,y,z,t – төрт белгісізі бар төрт теңдеулер жүйесін шешеміз. Ол үшін алдыңғы үш теңдеуден x,y,z белгісіздерін жазықтықтың теңдеуіне қойып t-ні табамыз: $t+6+t-4+t-2-3=0,\quad 3t=3,\quad t=1.$

Енді $t=1$ мәнін түзудің параметрлік теңдеуіне қойсақ, онда қиылысу нүктесінің координаттарын аламыз: $x=7,\ y=-3,\ z=-1$. Бұл нүкте M_1M_2 кесіндісінің қақ ортасы болғандықтан, $7=\frac{6+x_2}{2},$ $-3=\frac{-4+y_2}{2},\quad -1=\frac{-2+z_2}{2},$ ал бұдан M_2 нүктесінің координаттарын табамыз: $x_2=8,\quad y_2-2,\quad z=0.$ ◄

§ 2.14. Жазықтықтағы екінші ретті қисықтар

Тікбұрышты OXY координат жүйесінде келесі екінші дәрежелі теңдеумен

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

(A,B,C,D,E,F – нақты сандар және $A^2+B^2+C^2\neq 0$) анықталған қисықты **екінші ретті қисық** деп атайды.

(1) теңдеудің дербес жағдайларын қарастырамыз:

1) Жарты өстерінің ұзындықтары a және b тең **эллипс** теңдеуі:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a\geq b>0.$$

Егер, дербес жағдайда, $a=b$ болса, онда центрі координаттың бас нүктесінде болатын, радиусі a тең шеңбер теңдеуін аламыз: $x^2+y^2=a^2$.

2) Жарты өстері a мен b тең **гипербола** теңдеуі:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a\geq b>0.$$

3) Парабола теңдеуі: $y^2=2px, \quad p>0.$

4) Қиылысатын түзулер жұбының теңдеуі:

$$a^2x^2-b^2y^2=0, \qquad a,b>0.$$

5) Параллель немесе **беттесетін түзулер жұбының теңдеуі:**

$$x^2-a^2=0, \qquad a\geq 0.$$

Енді осы аталған қисықтарға қысқаша тоқталамыз.

1-Анықтама. Эллипс - координаттары

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a\geq b>0 \tag{2}$$

теңдеуін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны.

Егер $a>b$ болса, онда $c=\sqrt{a^2-b^2}$ деп алып, OX өсіндегі ***эллипстің фокустары*** деп аталатын $F_1(-c,0)$ және $F_2(c,0)$ нүктелері бойынша эллипске келесі анықтаманы беруге болады.

2-Анықтама. *F_1 және F_2 фокустарына дейінгі қашықтық-тарының қосындысы тұрақты, 2a-ға тең болатын нүктелердің геометриялық орны* ***эллипс*** *деп аталады.*

Шынында да, $M(x,y)$ нүктесі $MF_1+MF_2=2a$ шартын қанағат-тандыратын кез келген нүкте болса (30-суретті қараңыз)

$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \ MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ болғандықтан,

$$2a=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

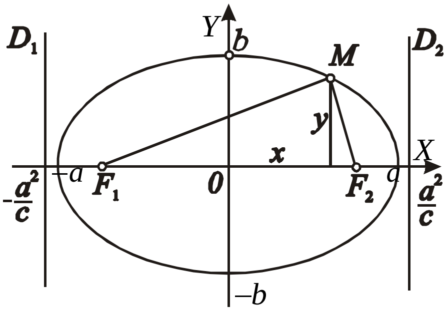
$$\Rightarrow \quad 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad +(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 4a^2+4cx= \; 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; -b^2x^2=-a^2b^2+a^2y^2 \quad \Rightarrow \quad a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



30-сурет

Керісінше, (x,y) нүктесінің координаттары (2) теңдеуді қанағаттандырса, онда осы амалдарды кері бағытта жасай отырып, (x, y) нүктесінен F_1 және F_2 нүктелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысы $2a$-ға тең болатынын көреміз.

(2) теңдеуді **эллипстің канондық (дағдылы) теңдеуі** дейді, ал a мен b эллипстің сәйкес **үлкен** және **кіші жарты өстері** деп аталады.

Егер $y = 0$ болса, онда $|x|=a,$ яғни эллипс сызығы OX өсін $x=a,$ $x=-a$ нүктелерінде қияды; $x=0$ болса, онда $|y|=b,$ яғни эллипс графигі OY өсін $y=-b,$ $y=b$ нүктелерінде қияды. Бұл нүктелерді **эллипстің төбелері** деп атайды.

Егер x-ті $(-x)$-ке, y-ті $(-y)$-ке ауыстырсақ, онда (2) теңдеу өзгермейді. Демек, эллипс сәйкес OY және OX өстеріне салыстырғанда симметриялы, сондықтан OX және OY - **эллипстің симметрия өстері** деп аталады (эллипстің фокустері арқылы өтетін өсті **фокальдік өс** деп атайды).

Ал $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ саны **эксцентриситет** деп аталады. Эллипс эксцентриситеті үшін $0\le e<1$ теңсіздіктері орындалады.

$|x|=\dfrac{a}{e}=\dfrac{a^2}{c}$ теңдеулерімен анықталатын (фокальдік өске перпендикуляр) түзулер **эллипстің директрисалары** деп аталады.

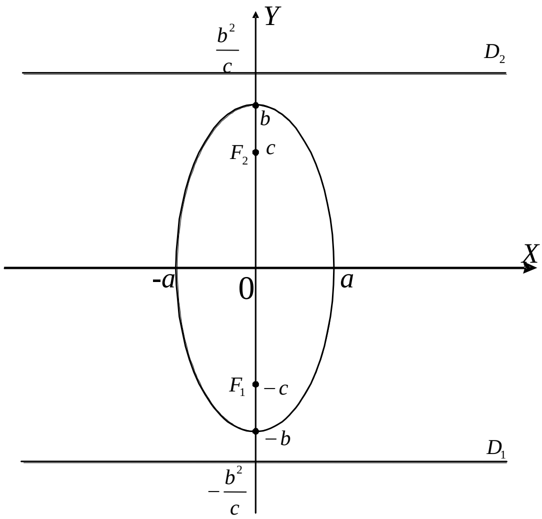
Мысал. $4x^2+9y^2=36$ эллипсінің канондық теңдеуін жазып, фокустарын, жарты өстерін, эксцентриситетін және директриса-ларын табу керек.

▼ Теңдеуді 36-ға бөлсек, $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1.$ Мұнда $a^2=9,\quad b^2=4$, демек $a=3,\quad b=2$. Бұдан $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}.$ Сондықтан $F_1(-\sqrt{5},0),$ $F_2(\sqrt{5},\ 0),$ $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}.$ Директриса теңдеулері: $|x|=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ немесе $x=\dfrac{9}{\sqrt{5}},\ x=-\dfrac{9}{\sqrt{5}}.$ ▲

1-ескерту: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ b>a$ эллипсінің фокустары OY өсінде жатады: $F_1\left(0;-\sqrt{b^2-a^2}\right),$ $F_2\left(0;\sqrt{b^2-a^2}\right)$; эксцентриситеті $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ тең; директрисалары – OY өсіне перпендикуляр және $|y|=\dfrac{b}{e}=\dfrac{b^2}{c}$ теңдеулерімен анықталады (31-сурет).

2-ескерту:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \tag{2'}$$

теңдеуі – канондық теңдеумен анықталған эллипсті параллель жылжыту арқылы алынған, центрі $O'(x_0, y_0)$ нүктесінде болатын эллипсті анықтайды.



31-сурет

Мысал. $x^2+2x+4y^2-4y-2=0$ теңдеуімен анықталған эллипстің центрін, жарты өстерін, фокустерін және директри-саларын табайық.

▼ Ол үшін алдымен x пен y-ке қатысты толық квадраттар бөлеміз:

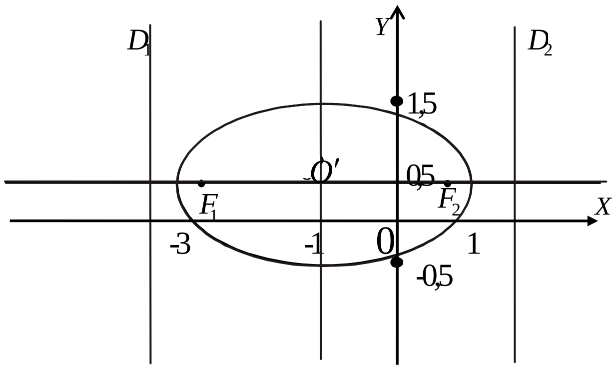
$$x^2+2x+1-1+4\left(y^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-2=0,$$

$$(x+1)^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4, \qquad \frac{(x+1)^2}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

Бұл эллипс үшін $O'\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $a=2$, $b=1$; $\quad c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3};$

$F_1\left(-1-\sqrt{3};\ 0,5\right)$; $F_2\left(-1+\sqrt{3};\ 0,5\right)$; $D_1: x=-1-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$; $D_2: x=-1+\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(32-сурет). ▲



32-сурет

3-ескерту: Дербес жағдайда $a=b$ $(c=0)$, болса онда $(2')$ – теңдеуінен, центрі (x_0, y_0) нүктесінде, радиусі $R=a$ тең шеңбер теңдеуін аламыз:

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=a^2. \qquad (2'')$$

4-ескерту. Эллипстің **параметрлік теңдеуі**

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \qquad 0\le\theta<2\pi. \end{cases} \qquad (3)$$

түрінде жазылады. Шынында да, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{b^2\sin^2\theta}{b^2}=$ $=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, ал бұл θ-праметрінің кез келген мәнінде (x, y) нүктесі (2) эллипсте жатады деген сөз.

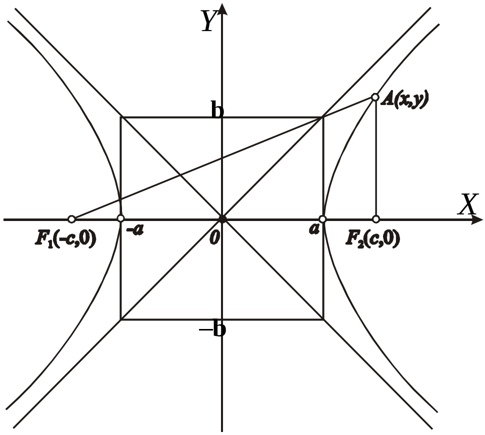
Эллипстер (шеңберлер) табиғатта және күнделікті өмірде көп кездеседі. Мысалы, планеталар күнді эллипс бойымен айнала қозғалады, ал ол эллипстердің фокустерінің бірінде күн тұрады.

1-Анықтама. Гипербола - координаттары

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,b>0 \tag{4}$$

теңдеуін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны.

Егер $c=\sqrt{a^2+b^2}$ деп алсақ, онда OX өсіндегі гиперболаның **фокустері** деп аталатын $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ нүктелері бойынша (33-сурет) гиперболаның екінші анықтамасын беруге болады.



33-сурет

2-Анықтама. F_1 *және* F_2 *фокустарға дейінгі қашықтық-тарының айырымы тұрақты, 2a тең нүктелердің геометриялық орны* ***гипербола*** *деп аталады.*

Шынында да, егер $A(x,y)$ – гиперболаның кез келген нүктесі болса, онда

$$AF_1-AF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2+4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2,$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2)+a^2y^2,$$

$$(a^2+b^2)x^2 = a^2x^2 + a^2b^2 + a^2y^2, \;\; b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \;\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Біз гиперболаның оң жақ тармағын алдық. Сол жақ тармағын алу үшін $AF_2 - AF_1 = 2a$ теңдігінен бастап, жоғарыдағы түрлендірулерді жасау керек.

Егер осы амалдарды кері бағытта жасасақ, онда (4) теңдеуді қанағаттандыратын (x, y) нүктелерден F_1 және F_2 фокустарға дейінгі қашықтықтар айырымы $2a$-ға тең болатыны шығады.

(4) – **гиперболаның канондық (дағдылы) теңдеуі** деп аталады.

(4) теңдеуден гиперболаның OX және OY өстеріне салыстырғанда симметриялы болатынын байқаймыз. Мұнда OX өсіндегі $[-a;a]$ кесіндісі және OY өсіндегі $[-b;b]$ кесіндісі – гиперболаның сәйкес **нақты** және **жорамал өстері** деп аталады.

Егер $y=0$ болса, онда $x=a, \; x=-a$. Яғни гипербола OX өсін $(-a;0)$ және $(a,0)$ нүктелерінде қияды. Осы нүктелерді гипер-боланың **төбелері** дейді.

Егер $x=0$ болса, онда $-\frac{y^2}{b^2}=1.$ Бұл теңдеудің нақты түбірі жоқ, яғни гипербола OY өсімен қиылыспайды. Эллипстегі сияқты, O нүктесі гиперболаның **центрі** деп аталады.

Гиперболаның эксцентриситеті мен директрисалары эллипстің сәйкес эксцентриситеті мен директрисалары сияқты анықталады: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ – **эксцентриситет,** $|x| = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ – директрисалар.

Гипербола үшін $e>1$ теңсіздігі орындалады. Суретте $y = \pm\frac{b}{a}x$ теңдеуімен анықталған екі түзу салынған. Олар гиперболаның **асимптоталары** деп аталады (асимптота ұғымы математикалық анализ курсында қарастырылады).

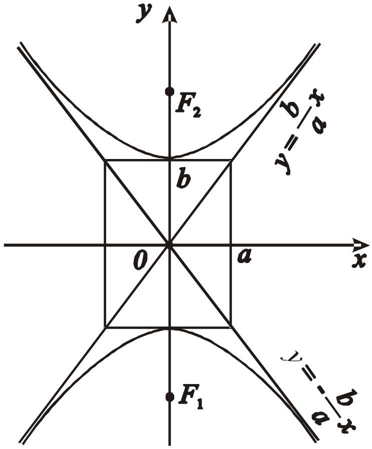
Мысал. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ гиперболасында $a=3, \; b=2, \quad c=\sqrt{a^2+b^2} =$

$= \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}; \;\; F_1\left(-\sqrt{13},0\right); \;\; F_2\left(\sqrt{13},0\right); \;\; e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}; \;\; D_1 : x = -\frac{9}{\sqrt{13}};$

$D_2 : x = \dfrac{9}{\sqrt{13}}$. Асимптоталарының теңдеулері: $y = \pm \dfrac{2}{3} x$.

1-ескерту.
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

теңдеуі, $[-b;b]$ нақты өсі y өсінде, $[-a;a]$ жорамал өсі x өсінде, фокустары $F_1\left(0, -\sqrt{a^2+b^2}\right)$, $F_2\left(0, \sqrt{a^2+b^2}\right)$, эксцентриситеті $e = \dfrac{c}{b}$, ал директрисалары $D : y = \pm \dfrac{b^2}{c}$ болатын гиперболаны анықтайды (34-сурет).



34-сурет

2-ескерту.
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (4')$$

теңдеуі (4) гиперболаны параллель жылжыту арқылы алынған гиперболаны анықтайды. Бұл гиперболаның центрі $O'(x_0, y_0)$ нүктесінде.

Мысал. $x^2 + 2x - 4y^2 + 4y - 4 = 0$ гиперболасының элементтерін анықтайық.

▼ x-ке және y-ке қатысты толық квадрат бөлеміз:

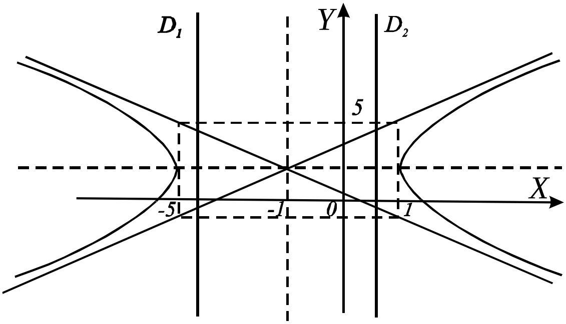
$$(x^2+2x+1)-1-4\left(y^2-2\cdot\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\right)+1-4=0,$$

$$(x+1)^2-4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4, \qquad \frac{(x+1)^2}{4}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

Бұл – центрі: $O'\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ нүктесінде, $a=2,\ b=1,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5},$

$F_1\left(-1-\sqrt{5};\ 0,5\right),\quad F_2\left(-1+\sqrt{5};\ 0,5\right),\quad D_1: x=-1-\frac{4}{\sqrt{5}},\quad D_2: x=-1+\frac{4}{\sqrt{5}}$

болатын гипербола. Гипербола асимптоталары: $y-0,5=\pm\frac{1}{2}(x+1)$ (35-сурет). ▲



35-сурет

Күн жүйесі арқылы ұшып өтетін космостық дене – фокусында күн тұратын гипербола траекториясымен қозғалады.

3-ескерту. (4) гиперболаның оң бұтағының параметрлік теңдеуін келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} x=a\cdot chu=a\cdot\dfrac{e^u+e^{-u}}{2}, \\ y=b\cdot shu=b\cdot\dfrac{e^u-e^{-u}}{2}, \qquad -\infty<u+\infty. \end{cases} \tag{5}$$

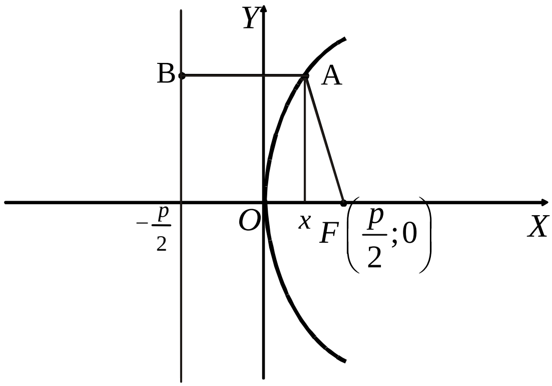
Шынында да, $ch^2u - sh^2u = 1$ екенін ескерсек, онда (5) теңдеуден $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ch^2u - sh^2u = 1$ аламыз. Гиперболаның оң тармағының жоғарғы жартысы u параметрінің $u \in [0, +\infty)$ мәнде-ріне, ал төменгі жартысы u параметрінің $u \in [-\infty; 0)$ мәндеріне сәйкес келеді.

1-Анықтама. Парабола – координаттары

$$y^2 = 2px, \quad p > 0 \tag{6}$$

теңдеуін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны.

Егер OX өсінде **парабола фокусі** деп аталатын $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ нүктесін белгілеп, **параболаның директрисасы** деп аталатын $x = -\frac{p}{2}$ түзуін жүргізсек, онда параболанаң екінші анықтамасын беруге болады (36-сурет):



36-сурет

2-Анықтама. *Фокус пен директрисадан бірдей қашықтықта орналасқан (x, y) нүктелердің геометриялық орны **парабола** деп аталады.*

Шынында да, $|AF|^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \ \ |AB|^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

Сондықтан $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2, \ -px + y^2 = px, \ y^2 = 2px.$

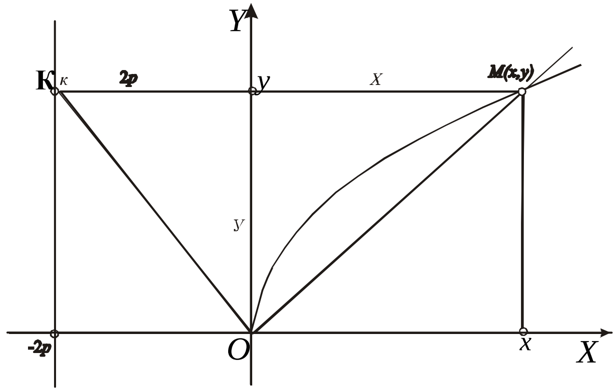
Керісінше, кординаттары (6) теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер фокус пен директрисадан бірдей қашықтықта жатады.

(6) теңдеуді **параболаның канондық (дағдылы) теңдеуі** дейді, ал $p > 0$ санын оның **параметрі** деп атайды. O нүктесін парабола **төбесі** дейді. OX – **параболаның симметрия өсі** деп аталады.

Парабола эксцентриситеті бірге тең $(e = 1)$ деп есептеледі. Параболаның жоғарғы жарты бөлігінің теңдеуі

$$y = \sqrt{2px}, \ \ 0 \le x < \infty, \tag{7}$$

яғни параболаның (x, y) нүктесінің ординатасы – $2p$ мен x – шамаларының геометриялық ортасы. Осы қасиетті пайдаланып, параболаны циркуль мен линейка көмегімен салу тәсілін көрсетейік.



37-сурет

$x = -2p$ түзуін жүргізіп (суретті қараңыз), ол түзуден кез келген $K(-2p, y), \ \ y > 0$ нүктесін алайық. K нүктесін O нүктесімен түзу арқылы жалғап, O нүктесінен OK түзуіне перпендикуляр түзу жүргізейік. Одан соң, K нүктесі арқылы OX өсіне параллель түзу жүргізсек, ол алдыңғы түзумен $M(x,y)$ нүктесінде қиылысады. $M(x,y)$ – парабола нүктесі.

Параболада асимптота болмайды.

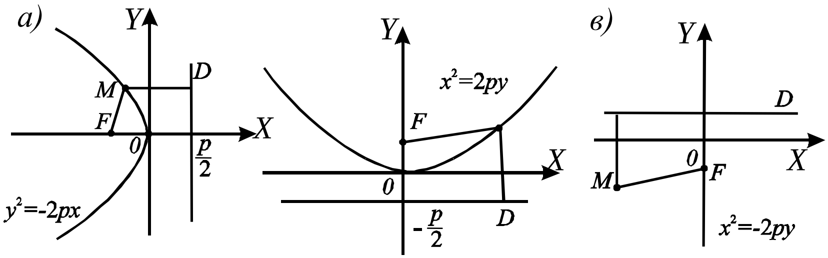
1-ескерту. $y^2=-2px,\quad x^2=2py,\quad x^2=-2py$ теңдеулері, сәйкес, 38 *а, б, в* суреттерде көрсетілген параболаларды анықтайды.

Мысал. $y=x^2$ параболасында: $p=\dfrac{1}{2}$, $F\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$, директриса $y=-\dfrac{1}{4}$.

2-ескерту. Мына теңдеу:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0),\quad p>0 \tag{8}$$

төбесі $O'(x_0,y_0)$ нүктесінде болатын параболаны анықтайды. Ол $-y^2=2px,\quad p>0$ параболасын параллель жылжыту арқылы алынады.



38-сурет

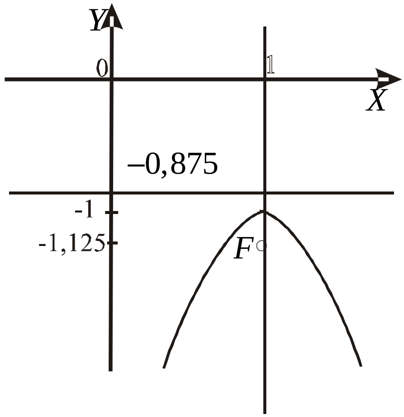
Мысал. $y+2x^2-4x+3=0$ параболасының негізгі элемент-терін анықтайық. Ол үшін x-ке қатысты толық квадрат бөлеміз:

$$y+2(x^2-2\cdot x+1)-2+3=0,\quad y+2(x-1)^2+1=0,\quad (x-1)^2=-\frac{1}{2}(y+1).$$

Мұнда парабола төбесі $O'(1,\text{-}1)$; $p=\dfrac{1}{4}$; парабола тармақтары төмен бағытталған; $F(1,\ -1{,}125)$; $D: y=-0{,}875$ (39-сурет).

Мысалы, горизонтқа бұрыш жасай лақтырылған дене (ауа кедергісі жоқ болса), тармақтары төмен бағытталған парабола траекториясы бойынша қозғалады.

Эллипс, гипербола, парабола директрисалары, фокустары және оларда жататын нүктелерге қатысты мынадай тамаша қасиет бар: ***қисықтың кез келген М нүктесінен фокусқа дейінгі қашықтықтың осы нүктеден, алынған фокуске сәйкес келетін директрисаға дейінгі қашықтыққа қатынасы тұрақты және қисықтың эксцентриситетіне тең.***



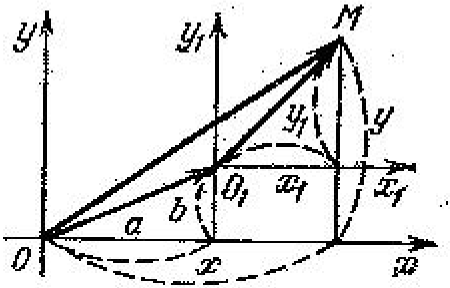
39-сурет

§ 2.15. Екі айнымалды квадраттық тұлға

1. Координаттарды түрлендіру. Қандай да бір есепті аналитикалық геометрия әдістерімен шешу үшін зерттеліп отырған объект нүктелерінің координаттары қарапайым түрде өрнектелетіндей жаңа координат өстерін таңдап алу өте маңызды. Бұл, нүктенің ескі $(x; y)$ координаттары мен жаңа $(x_1; y_1)$ координаттарын байланыстыратын – ***өту формулалары*** арқылы іске асады.

Өстерді параллель көшіру. Алдымен, *жаңа* O_1X_1, O_1Y_1 *өстердің бағыттары ескі* OX, OY *өстердің бағыттарындай, яғни ескі өстерге параллель болатын, ал жаңа* O_1 *координат басы бұрынғы О координат басынан өзгеше* болатын, *өстерді параллель жылжыту* деп аталатын түрлендіруді қарастырайық.

Жаңа бас нүкте мен қандай да бір M нүктесінің ескі координаттары сәйкес $(a;b)$ және $(x;y)$ болсын: $O_1(a;b)$, $M(x;y)$. 40-суретте көрсетілген OO_1M тізбек векторлар мен оларды тұйықтайтын $\overrightarrow{OM}$ векторының ескі OX өсіне проекцияларын қарастырамыз. Вектордың бағытталған түзуге проекциясының қасиеттері (§2.5, (2) теңдік**)** бойынша $Пр_{OX}\overrightarrow{OM} = Пр_{OX}\overrightarrow{OO_1} + Пр_{OX}\overrightarrow{O_1M}$, ал $Пр_{OX}\overrightarrow{OM} = x_1$, $Пр_{OX}\overrightarrow{OO_1} = a$, $Пр_{OX}\overrightarrow{O_1M} = Пр_{O_1X_1}\overrightarrow{O_1M} = x_1$ болғандықтан $x = a + x_1$ теңдігін аламыз.



40-сурет

Дәл осылай, жоғарыда аталған векторлардың ескі OY өсіне проекцияларын қарастыра отырып $y = b + y_1$ теңдігін аламыз.

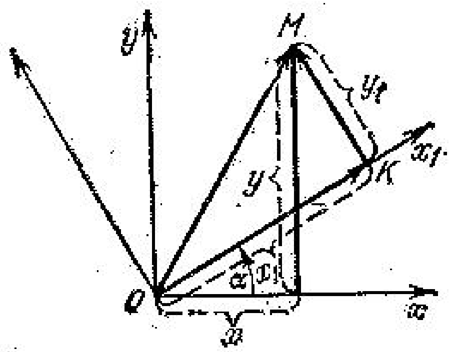
Сонымен, өстерді параллель көшіру формулалары:

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1. \tag{1}$$

Мысал. Үшбұрыштың төбелері OXY тік бұрышты координаттар жүйесінде берілген: $A\left(1+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{2}\right)$, $B\left(2+\sqrt{3};\ 3-\sqrt{2}\right)$, $C\left(3+\sqrt{3};\ -\sqrt{2}\right)$. Координат басы A нүктесіне өтетіндей, яғни $O_1(a;b) = O_1\left(1+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{2}\right)$ етіп өстерді параллель жылжытайық. Онда (1) формулалар бойынша $x = 1+\sqrt{3}+x_1$, $y = 2-\sqrt{2}+y_1$, ал бұдан жаңа

$(x_1; y_1)$ координаттардың ескі $(x; y)$ координаттар арқылы өрнегін аламыз: $x_1 = x - 1 - \sqrt{3}$, $y_1 = y - 2 + \sqrt{2}$. Егер мұндағы x пен y орнына үшбұрыш төбелерінің ескі координаттарын қойсақ $A(x_1; y_1) = A(0;0)$, $B(x_1; y_1) = B(1;1)$, $C(x_1; y_1) = C(2;-2)$ аламыз. Үшбұрыштың жаңа координаттары өте қарапайым, ал бұлар, үшбұрышқа байланысты есептерді шешуді жеңілдетеді.

Өстерді бұру. Енді *жаңа* O_1X_1, O_1Y_1 *өстердің координат басы ескі* O *орнында, ал бағыттары ескі* OX, OY *өстермен салыстырғанда белгілі бір* α *бұрышқа бұрылатын* түрлендіруді қарастырамыз.



41-сурет

Сонымен, жаңа өстердің қалпын анықтайтын, *бұрылу бұрышы* деп аталатын $\angle XOY = \alpha$ бұрышы берілсін (41-сурет). OKM векторлар тізбегі мен оны тұйықтайтын $\overrightarrow{OM}$ векторының ескі OX өсіне проекцияларының § 2.5 (2) қасиетін қолдансақ $Пр_{OX}\overrightarrow{OM} = Пр_{OX}\overrightarrow{OK} + Пр_{OX}\overrightarrow{KM}$, ал бұдан $Пр_{OX}\overrightarrow{OM} = x$, $Пр_{OX}\overrightarrow{KM} = x_1 \cdot \cos\alpha$, $Пр_{OX}\overrightarrow{KM} = y_1 \cdot \cos(\alpha + 90°) = -y_1 \cdot \sin\alpha$ теңдіктерін ескеріп $x = x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha$ аламыз. Дәл осылай, жоғарыда аталған векторлардың ескі OY өсіне проекцияларын қарастыра отырып $y = x_1 \cdot \sin\alpha - y_1 \cdot \cos\alpha$ аламыз. Сонымен, өстерді бұру формулалары мынадай:

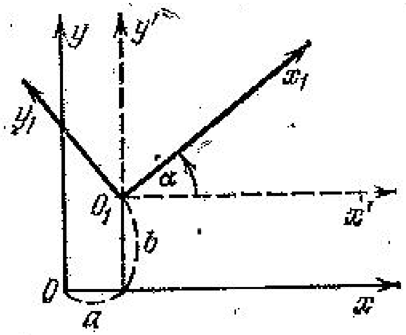
$$x = x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha, \qquad y = x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha. \qquad (2)$$

Мысал. Тең бүйірлі (a=b) гиперболаның келесі теңдеуін $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ өстерді бұру формулалары арқылы ықшамдайық.

▼ a=b болғандықтан бұл гиперболаның асимптоталары $y = x$ және $y = -x$ теңдіктерімен анықталады (42-сурет). Осы түзулерді жаңа өстер ретінде анықтайық. Онда жаңа өстер ескі өстерді $\alpha = -45^0$ бұрышқа бұру арқылы аланатынын көреміз. Олай болса, (2) өту формулалары бойынша

$$x = x_1 \cdot \cos(-45^0) - y_1 \cdot \sin(-45^0) = x_1 \cdot \cos 45^0 + y_1 \cdot \sin 45^0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1$$



42-сурет

және $y = x_1 \cdot \sin(-45^0) + y_1 \cdot \cos(-45^0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1$ аламыз. Бұл теңдіктерді берілген теңдеуге қойсақ $\frac{(x_1 + y_1)^2 - (y_1 - x_1)^2}{2a^2} = 1,$ ал бұдан $x_1 y_1 = \frac{a^2}{2}$ немесе $\frac{a^2}{2} = k$ деп белгілеп $y_1 = \frac{k}{x_1}$ аламыз.

Бұл мектеп математикасындағы белгілі гипербола теңдеуі. ▲

Жалпы жағдай. Жалпы жағдайда жаңа өстердің бас нүктесі де бағыты да жаңа. Жаңа бас нүктенің ескі өстердегі координаттары $O_1(a;b)$ және бұрылу бұрышы α болсын (4-сурет). Бас нүктесі $O_1(a;b)$ – жаңа, ал бағыттары ескі O_1X', O_1Y' көмекші өстер жүйесін енгізейік. Көмекші өстердегі координаттары $(x';y')$ болатын *К* нүктесін алайық. O_1X', O_1Y' өстері OX, OY өстерінен бас нүктені $O_1(a;b)$ нүктеге параллель жылжыту арқылы алынатындықтан

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1. \tag{3}$$

Одан соң O_1X_1, O_1Y_1 жаңа өстер көмекші O_1X', O_1Y' өстерден α бұрышқа бұрылу арқылы алынатындықтан

$$x' = x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha, \quad y' = x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha. \tag{4}$$

Енді (4)-ті (3)-ке қойып, ескі координаттарды жаңа координаттар арқылы өрнектей аламыз

$$x = a + x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha, \quad y = b + x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha. \tag{5}$$

2. ***Квадраттық тұлғаларды канондық түрге келтіру.***

Екінші ретті сызықтардың

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H \tag{6}$$

түріндегі теңдеумен берілген жағдайын қарастырамыз. Егер мұндағы x, y - терді $-x$, $-y$ -пен ауыстырсақ, онда (6) теңдеудің сол жағындағы өрнек өзгермейді. Басқаша айтқанда, егер $M(x;y)$ нүктесі (6)-шы сызықта жатса, онда $N(-x;-y)$ нүктесі де осы сызықта жатады. Бұл (6)-шы сызықтың координат бас нүктесіне салыстырғанда симметриялы орналасатынын көрсетеді. Сонымен, егер сызық (6)-шы түрдегі теңдеумен берілсе, онда оның (симметрия) центрі бар және координаттардың бас нүктесі осы центрде орналасады.

Енді екі x, y айнымалды ***квадраттық тұлға*** деп аталатын, (6)-

шы теңдеудің сол жағындағы

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \qquad (7)$$

өрнекті ***канондық түрге*** келтіру есебімен айналысамыз. Оның мәнісі – координат өстерін бұра отырып (7)-ші тұлғадағы жаңа координаттардың көбейтіндісін x_1y_1 жою, яғни (7)-ші тұлғаны келесі түрге келтіру

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2. \qquad (8)$$

Бұл теңдіктің оң жағы квадраттық тұлғаның ***канондық түрі*** деп аталады.

Бұл есепті шешу үшін жоғарыдағы

$$x = x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha, \qquad y = x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha, \qquad (2)$$

өстерді бұру формулаларын пайдаланамыз. Бұл формулаларды қолдануды жеңілдету үшін

$$\cos\alpha = l_1, \quad \sin\alpha = m_1, \quad -\sin\alpha = l_2, \quad \cos\alpha = m_2 \qquad (9)$$

белгілеулерін енгізіп (2) формулаларды келесі түрде жазамыз

$$\begin{cases} x = l_1x_1 + l_2y_1, \\ y = m_1x_1 + m_2y_1. \end{cases} \qquad (10)$$

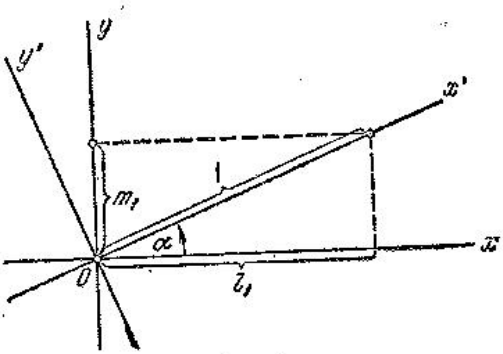
Бұл теңдіктерге қатысты келесі үш сұрақты ашып көрсетейік.

Бірінші, жұпталған l_1, m_1 және l_2, m_2 коэффициенттерінің геометриялық мағынасы туралы. Егер жаңа OX_1 өсіне координаттың бас нүктесінен осы өстің бағытымен бірлік вектор салсақ, онда бұл вектордың ескі координаттарға проекциялары

$l_1 = \cos\alpha,\ m_1 = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$ болады (§ 2.5, (1)-қараңыз). Олай болса, $\overrightarrow{k_1} = \{l_1; m_1\} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ **- жаңа** OX_1 ***абсцисса өсінің бағытын анықтайтын бірлік вектор***. Осы сияқты,

$$\vec{k}_2=\{l_2;m_2\}=\{-\sin\alpha;\cos\alpha\}=\left\{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right);\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

– ***жаңа*** OY_1 ***ордината өсінің бағытын анықтайтын бірлік вектор*** (43-сурет).



43-сурет

Екінші, жоғарыдағы (2)-ші теңдіктер ескі коодинаттарды жаңа координаттар арқылы өрнектеп тұр. Жаңа өстер жүйесіне ескі өстер жүйесін α бұрышқа бұру арқылы көшсек, керісінше, ескі өстер жүйесіне жаңа өстер жүйесін, кері қарай, $-\alpha$ бұрышқа бұру арқылы көшуге болады. Олай болса, *жаңа координаттарды ескі координаттар арқылы өрнектеу* үшін, (2)-ші теңдіктердегі α -ны $-\alpha$ -ға, сонымен бірге, ескі мен жаңа координаттарды өзара орын ауыстырса болғаны

$$x_1=x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha,\qquad y_1=-x\cdot\sin\alpha+y\cdot\cos\alpha. \tag{2'}$$

Бұл теңдіктерге (9) белгілеулерді енгізсек

$$\begin{cases}x_1=l_1x+m_1y,\\ y_1=l_2x+m_2y\end{cases} \tag{10'}$$

аламыз.

Үшінші (маңызды) сұрақ. Егер (10)-шы теңдіктер – тікбұрышты координаттар жүйесін қандай да бір бұрышқа бұратын, түрлендіру формулалары болса, (яғни, (2)-ші, ***өстерді бұру*** формулаларының қызметін атқарса), онда l_1, m_1, l_2, m_2 коэффициенттері үшін келесі шарттар орындалады ((9) теңдіктер арқылы тексеріңіз және төмендегі ескертуді қараңыз):

$$l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 = 1, \tag{11}$$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0, \tag{12}$$

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 1. \tag{13}$$

Керісінше, егер (11)-(13) шарттар орындалса, онда (10)-шы теңдіктер – өстер жүйесін бұратын, тікбұрышты координаттарды түрлендіру формулалары болатынына, яғни (2)-ші формулалардың қызметін атқаратынына көз жеткізейік. OX, OY өстері мен тікбұрышты координаттар жүйесі және қандай да бір l_1, m_1, l_2, m_2 коэффициенттері бар (10)-шы теңдіктер берілсін. Онда, (11) шарттар бойынша, $\vec{k}_1 = \{l_1; m_1\} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$, $\vec{k}_2 = \{l_2; m_2\} = \{\cos\beta; \sin\beta\}$ теңдіктері орындалатын α және β бұрыштары табылады. Бұдан (12) шартты пайдаланып

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\beta - \alpha) = 0,$$ яғни $\vec{k}_1 = \{l_1; m_1\}$ мен $\vec{k}_2 = \{l_2; m_2\}$ векторларының ортогональ болатынын көреміз. Соңғы теңдікте $\cos(\beta - \alpha) = 0$ болғандықтан, $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ немесе $\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$ аламыз. Бұл мәндер бойынша $\vec{k}_2 = \{l_2; m_2\} = \{-\sin\alpha; \cos\alpha\}$ немесе $\vec{k}_2 = \{l_2; m_2\} = \{\sin\alpha; -\cos\alpha\}$ аламыз. Бірақ (13) шартты тек алғашқы $\vec{k}_2 = \{l_2; m_2\} = \{-\sin\alpha; \cos\alpha\}$ векторы ғана қанағаттандырады. Ал бұл (10)-шы формулалардың (2)-ші формулаларға келгенін көрсетеді. Ендеше, (11) - (13) шарттардың орындалуы, шынында да, ***оң бағытталған*** *тікбұрышты*

координаттар жүйесіне әкеледі екен, яғни екі өстің екеуі де бір бағытта, бір бұрышқа бұрылады екен.

Ескерту. (11) - (13) теңдіктер $\vec{k}_1=\{l_1;m_1\}$, $\vec{k}_2=\{l_2;m_2\}$ векторларына қатысты сәйкес келесі амалдар екенін көреміз:

$$|k_1|^2=l_1^2+m_1^2=1, \qquad |k_1|^2=l_2^2+m_2^2=1; \tag{11'}$$

$$\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2=l_1l_2+m_1m_2=0; \tag{12'}$$

$$\vec{k}_1(l_1;\ m_1;\ 0)\times\vec{k}_2(l_2;\ m_2;\ 0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ l_1 & m_1 & 0\\ l_2 & m_2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\vec{k}. \tag{13'}$$

Мұндағы $(11')$ теңдіктері $\vec{k}_1=\{l_1;m_1\}$, $\vec{k}_2=\{l_2;m_2\}$ - бірлік векторлар екенін көрсетсе, $(12')$ теңдігі $\vec{k}_1=\{l_1;m_1\}$, $\vec{k}_2=\{l_2;m_2\}$ векторларының скаляр көбейтіндісі нөлге тең, яғни олардың ортогональ екенін көрсетеді. Ал $(13')$ теңдігі $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}$ - *оң үштік векторлар,* яғни бұл векторлар жүйесінің бағыты (ориентациясы) өзгермегенін көрсетеді.

Енді тақырыбымыздың басты сұрағына көшейік.

Жоғарыда $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ (7) квадраттық тұлғаны $Ax^2+2Bxy+Cy^2=\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2$ (8) канондық түрге келтіру үшін, l_1,m_1,l_2,m_2 коэффициенттері (11)-(13) шарттарды қанағаттандыратын $\begin{cases}x=l_1x_1+l_2y_1,\\ y=m_1x_1+m_2y_1,\end{cases}$ (10) формулаларды табу керек екендігін көрдік. Осы есепті шешудің ыңғайлы тәсілін қолданайық. Айталық, (10)-шы формулалардың коэффициенттері табылды және (8) теңдік орындалды делік. Оны келесі түрде жазып аламыз

$$(Ax+By)x+(Bx+Cy)y=\lambda_1x_1x_1+\lambda_2y_1y_1. \tag{14}$$

Жақша ішіндегі өрнектерді (10)-шы формулалар бойынша түрлендіреміз

$$\begin{cases} Ax+By=\left(Al_1+Bm_1\right)x_1+\left(Al_2+Bm_2\right)y_1, \\ Bx+Cy=\left(Bl_1+Cm_1\right)x_1+\left(Bl_2+Cm_2\right)y_1. \end{cases} \tag{15}$$

(14)-ші теңдіктің оң жағына $\begin{cases} x_1=l_1x+m_1y, \\ y_1=l_2x+m_2y \end{cases}$ кері түрлендіру формулаларын ($\left(10'\right)$ қараңыз) қолданамыз

$$\begin{cases} x_1x_1=(l_1x+m_1y)x_1, \\ y_1y_1=(l_2x+m_2y)y_1. \end{cases} \tag{16}$$

Осы (15), (16) түрлендірулер (14) тепе-теңдігін келесі түрге алып келеді

$$\begin{gathered} \left(Al_1+Bm_1\right)xx_1+\left(Bl_1+Cm_1\right)yx_1+\left(Al_2+Bm_2\right)xy_1+ \\ +\left(Bl_2+Cm_2\right)yy_1=\lambda_1l_1xx_1+\lambda_1m_1yx_1+\lambda_2l_2xy_1+\lambda_2m_2yy_1. \end{gathered} \tag{17}$$

Мұндағы ұқсас мүшелердің, яғни xx_1, yx_1, xy_1, yy_1-төрт мүшенің коэффициенттерін өзар теңестірсек (17) және (8) тепе-теңдіктер сақталады

$$\begin{cases} Al_1+Bm_1=\lambda_1l_1, \\ Bl_1+Cm_1=\lambda_1m_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} Al_2+Bm_2=\lambda_2l_2, \\ Bl_2+Cm_2=\lambda_2m_2. \end{cases} \tag{18}$$

Біздің есеп

$$\begin{cases} Al+Bm=\lambda l, \\ Bl+Cm=\lambda m \end{cases} \tag{19}$$

түріндегі жүйенің (11)-(13) шарттарды қанағаттандыратын қандай да бір, l_1, m_1, λ_1 мен l_2, m_2, λ_2 – екі шешімін табуға алып келді. Бұл жүйені келесі түрде жазып алайық

$$\begin{cases}(A-\lambda)l+Bm=0,\\ Bl+(C-\lambda)m=0.\end{cases} \tag{20}$$

Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің тривиал емес шешімі болу үшін келесі шарт орындалуы керек (§ 1.7. қараңыз)

$$\begin{vmatrix}A-\lambda & B\\ B & C-\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{21}$$

Бұл анықтауышты ашып жазып келесі теңдеуді аламыз

$$\lambda^2-(A-C)\lambda+\left(AC-B^2\right)=0. \tag{22}$$

Бұл квадрат теңдеуден бізге қажетті $\lambda=\lambda_1,\ \lambda=\lambda_2$ екі нақты мәнді табамыз:

$$\lambda_{1,2}=\frac{A+C\pm\sqrt{(A+C)^2-4\left(AC-B^2\right)}}{2}, \tag{23}$$

өйткені $(A+C)^2-4\left(AC-B^2\right)=(A-C)^2+4B^2\geq 0.$

(21) теңдеу (7) *квадраттық тұлғаны* ***сипаттаушы теңдеу*** деп аталады, ал оның $\lambda=\lambda_1,\ \lambda=\lambda_2$ түбірлері – *квадраттық тұлғаны сипаттаушы сандар* деп аталады. Бұл сандар - квадраттық тұлғаның (8) канондық түрінің коэффициенттері.

Ендігі мәселе – жаңа өстерді анықтайтын $\vec{k}_1=\{l_1;m_1\}$, $\vec{k}_2=\{l_2;m_2\}$ векторларын табу үшін, келесі екі жағдайды қарастырамыз.

Бірінші жағдай. $(A+C)^2-4\left(AC-B^2\right)=(A-C)^2+4B^2>0.$ Бұл жағдайда $\lambda_1\neq\lambda_2$ екі сипаттаушы сан бар. Бірінші $\lambda=\lambda_1$ сипаттаушы санды (20) теңдеулер жүйесіне қойып оның нөл емес l,m шешімін аламыз. Бұл шешімнен $\{l,m\}$ векторын құраймыз - оның бағыты берілген *тұлғаның* λ_1 сипаттаушы санға сәйкес ***бас бағыт*** деп аталады. Әрине, $\vec{k}_1 = \{l_1; m_1\} = \{\mu l; \mu m\}$ (μ -сан) векторының да бағыты – бас бағыт болады. Егер мұнда $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{l^2 + m^2}}$ деп алсақ, онда $\left|\vec{k}_1\right|^2 = l_1^2 + m_1^2 = 1$ орындалады, яғни $\vec{k}_1 = \{l_1; m_1\}$ – сипаттаушы λ_1 санына сәйкес ***бас бағыттың бірлік векторы*** болады. Осы сияқты, (20) теңдеулер жүйесін $\lambda = \lambda_2$ сипаттаушы санына сәйкес шеше отырып $\vec{k}_2 = \{l_2; m_2\}$ бірлік векторды аламыз. Бұл вектор квадраттық тұлғаның λ_2 сипаттаушы санына сәйкес екінші бас бағытын анықтайды. Осы екі бағыттың өзара перпендикуляр, яғни (12) (немесе $(12')$) шартының орындалатынын көрсетейік.

Біз алған l_1, m_1, λ_1 және l_2, m_2, λ_2 сандары (18) теңдіктерді қанағаттандырады, өйткені бұл сандар (20) –ның шешімдері. (18) теңдіктердің сол жақтағы тобындағы бірінші және екінші теңдіктерді сәйкес $l_2,\ m_2$ сандарына көбейтіп алып оларды мүшелеп қосамыз. Содан соң, $l_1,\ m_1$ сандарын пайдаланып оң жақтағы топқа да дәл осылай жасаймыз. Нәтижеде келесі теңдіктерді аламыз

$$\begin{aligned} (Al_1 + Bm_1)l_2 + (Bl_1 + Cm_1)m_2 = \lambda_1(l_1 l_2 + m_1 m_2), \\ (Al_2 + Bm_2)l_1 + (Bl_2 + Cm_2)m_1 = \lambda_2(l_1 l_2 + m_1 m_2). \end{aligned}$$

Жақшаларды аша отырып, бұл екі теңдіктің сол жақтарында бірдей шамалар тұрғанын көреміз. Сондықтан, бұл теңдіктерді мүшелеп шегерсек $0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2)$ аламыз. Мұнда $\lambda_1 \neq \lambda_2$ болғандықтан, $l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$, яғни (12) (немесе $(12')$) шартының орындалатынын көреміз. Ал (13) шарттың орындалуын сақтау қиын емес, ол үшін қажет болса $\vec{k}_1 = \{l_1; m_1\}$ немесе $\vec{k}_2 = \{l_2; m_2\}$ векторын -1 санына көбейтсек болғаны.

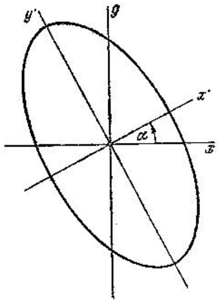
Екінші жағдай. $(A + C)^2 - 4(AC - B^2) = (A - C)^2 + 4B^2 = 0.$

Бұл жағдайда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ болады. $(A-C)^2 + 4B^2 = 0$ теңдігінен $A = C,\ B = 0$ аламыз. Онда квадрат теңдеудің түбірлерінің (23) формуласынан $\lambda = A = C$ шығады. Егер λ-ның бұл мәнін (20) жүйеге қойсақ, онда оның (l, m) шешімдері кез келген сандар бола алады, яғни кез келген бағыт квадраттық тұлға үшін бас бағыт болады. Ал $A = C,\ B = 0$ болғандықтан, тұлғаның түрі $Ax^2 + Ay^2$, яғни бірден канондық түрде болады, оған ешқандай түрлендіру қажет емес. Бірақ, өстерді кез келген бұрышқа бұруға болады, тұлға канондық түрін сақтайды.

Мысал. Берілген $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 20$ теңдеуді: а) канондық түрге келтіру керек; ә) теңдеуді канондық түрге келтіруші, координаттарды түрлендіру формулаларын табу керек.

▼ Теңдеудің сол жағындағы квадраттық тұлғада $A = 17,\ B = 6,\ C = 8.$ Сипаттаушы теңдеуді жазамыз ((21) қараңыз): $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$ Анықтауышты ашып жазамыз және шыққан квадрат теңдеудің түбірлерін (сипаттаушы сандарды) табамыз: $\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0,\quad \lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = 5.$ Канондық теңдеуді жазамыз ((8) қараңыз) $20x_1^2 + 5y_1^2 = 20,$ немесе $\dfrac{x_1^2}{1} + \dfrac{y_1^2}{4} = 1.$ Бұл – жарты өстері $a = 2,\ b = 1$ болатын эллипс. Енді осы ***канондық түрге келтіруші түрлендіру формулаларын*** табайық. Ол үшін (20) жүйені жазамыз: $\begin{cases} (17-\lambda)l + 6m = 0, \\ 6l + (8-\lambda)m = 0. \end{cases}$ Алдымен мұнда $\lambda = \lambda_1 = 20$ деп алсақ, $\begin{cases} (-3l + 6m = 0, \\ 6l - 12m = 0 \end{cases}$ аламыз. Жүйеде бірдей екі теңдеу тұрғандықтан оны келесі теңдеуге ауыстырамыз: $l - 2m = 0.$ Бұл теңдеудің қандай да бір шешімін, мысалы, $l = 2,\ m = 1$ алып, оны вектор түрінде жазамыз

$\{2;1\}$. Бұл векторды бірлік векторға келтіріп $\lambda_1 = 20$ сипаттаушы санға сәйкес бас бағытты аламыз: $\vec{k}_1 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$. Енді $\lambda = \lambda_2 = 5$ деп алсақ, жоғарыдағы жүйе келесі түрге келеді: $\begin{cases} 12l + 6m = 0, \\ 6l + 3m = 0. \end{cases}$ Бұл жүйе келесі теңдеуге парапар: $2l + m = 0$. Оның бір шешімін, мысалы, $l = 1,\ m = -2$ алып, одан келесі векторды құраймыз: $\{1; -2\}$. Бұл векторды бірлік векторға келтіреміз: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \right\}$. Бұл вектор (13) шартты қанағаттандыруы үшін оны -1-ге көбейтіп, $\lambda_2 = 5$ сипаттаушы санға сәйкес ***бас бағытты*** табамыз: $\vec{k}_2 = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}$. Сонымен, жаңа өстерге өту формулалары мынандай: $x = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} y_1$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_1$. Демек, жаңа өстер $\cos\alpha = l_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = m_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ теңдіктерімен, яғни $tg\alpha = \frac{m_1}{l_1} = \frac{1}{2}$ теңдігімен анықталатын α бұрышқа бұрылу арқылы алынады екен (44 – сурет). ▲



44-сурет

3. ***Квадраттық тұлғаның инвариантары. Берілген жалпы теңдеу бойынша екінші ретті қисықтың түрін анықтау.*** Кез келген квадраттық тұлға $\Phi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ берілсін және өстерді белгілі бір бұрышқа бұру үшін координаттардың $\begin{cases} x = l_1x_1 + l_2y_1, \\ y = m_1x_1 + m_2y_1 \end{cases}$ түрлендірілуі жасалсын. x,y-тің бұл өрнектерін квадраттық тұлғаға қойып оны жаңа координаттарға келтіреміз:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A_1x_1^{\,2} + 2B_1x_1y_1 + C_1y_1^{\,2}.$$

Әрбір тұлға үшін сипаттаушы теңдеулерді жазайық (2п. (22)-қараңыз): $\lambda^2 - (A+C)\lambda + \left(AC - B^2\right) = 0,$

$$\lambda^2 - (A_1 + C_1)\lambda + \left(A_1C_1 - B_1^{\,2}\right) = 0.$$

Екі квадраттық тұлға біріне-бірі түрленетіндіктен олар бір канондық түрге келеді. Демек, екі тұлға бірдей сипаттаушы λ_1, λ_2 сандарға ие болады, яғни екі теңдеудің түбірлері бірдей. Сондықтан, $A_1 + C_1 = A + C,\quad A_1C_1 - B_1^2 = AC - B^2,$ бірақ A_1, B_1, C_1 сандары A, B, C сандарымен бірдей болуы шарт емес. Бұдан біз, тұлғаны кез келген түрлендірумен жаңа координаттарға келтіргенмен $A+C$ мен $AC - B^2$ шамалары өзгеріске ұшырамайтынын көреміз. Сондықтан бұл шамаларды тікбұрышты координаттарды түрлендіруге қатысты *тұлғаның инвариантары* деп атайды. Ал $AC - B^2$ инварианты *квадраттық тұлғаның дискриминанты* деп аталады да δ арқылы белгіленеді: $\delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$. Виет теоремасы бойынша, $\delta = \lambda_1\lambda_2 = AC - B^2.$

Анықтама. Егер сипаттаушы λ_1, λ_2 сандардың таңбалары: бірдей, демек, $\delta = \lambda_1\lambda_2 = AC - B^2 > 0$ болса, онда квадраттық тұлға *эллипстік* деп аталады, ал λ_1, λ_2 таңбалары қарама-қарсы, демек,

$\delta = \lambda_1 \lambda_2 = AC - B^2 < 0$ болса, онда ол *гиперболалық квадраттық тұлға* деп аталады. Егер λ_1, λ_2 сандардың біреуі нөлге тең, демек, $\delta = \lambda_1 \lambda_2 = AC - B^2 = 0$ болса, онда квадраттық тұлға *параболалық* деп аталады.

Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі берілсін:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{24}$$

Егер бұл теңдеуді канондық түрге келтірсек, онда сызықтың түрін анықтауға болады. Біз, уақыттың шектеулігіне байланысты, мұнда оны канондық түрге түрлендіріп зерттеп жатпастан, тек келесі қорытындысын ғана береміз.

Екінші дәрежелі (24)-ші теңдеу келесі үш қисықтың бірін: *эллипсті* ($\delta = AC - B^2 > 0$ болса), *гиперболаны* ($\delta = AC - B^2 < 0$ болса), *параболаны* ($\delta = AC - B^2 = 0$ болса) анықтайды.

Ескерту. Бұл қорытындыда эллипс – *жорамал* ($\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = H$, $H < 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ теңдеуімен берілген) немесе *өзгеше* ($\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$ теңдеуімен берілген) болуы мүмкін. Сол сияқты, гипербола – *өзгеше* (мысалы, $4x^2 - 9y^2 = 0$ теңдеуімен берілген), парабола – *өзгеше* ($\lambda x^2 + K = 0$, $\lambda > 0$ теңдеуімен берілген) болуы мүмкін.

§ 2.16. Екінші ретті беттер

Екінші ретті бет деп *x*, *y* декарт координаттары келесі екінші дәрежелі алгебралық теңдеуді:

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

қанағаттандыратын нүктелер жиынын айтады. Мұндағы a_{ij} коэффициенттерінің ең болмағанда біреуі нөлге тең емес.

(1) теңдеудің маңызды дербес жағдайларын атап өтеміз:

1) Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0.$

2) Бір қуысты гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0.$

3) Қос қуысты гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0.$

4) Эллипстік параболоид: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad p,q>0.$

5) Гиперболалық параболоид: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad p,q>0.$

6) Екінші ретті конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad a,b,c>0.$

7) Нүкте: $x^2+y^2+z^2=0.$

8) Екінші ретті цилиндрлер:

а) эллипстік цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,b>0.$

б) гиперболалық цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,b>0.$

в) параболалық цилиндр: $y^2=2px, \quad p>0.$

г) қиылысатын жазықтықтар жұбы: $a^2x^2-b^2y^2=0, \quad a,b>0.$

д) параллель немесе беттесетін жазықтықтар: $x^2-a^2=0, \quad a>0$.

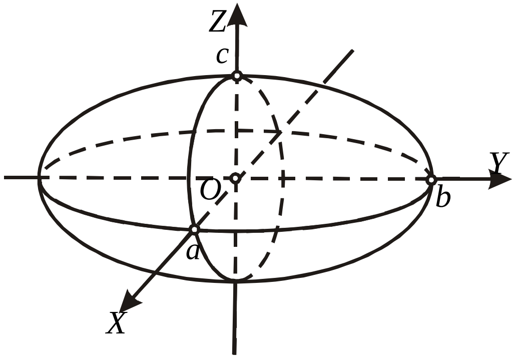
ж) түзу: $x^2+y^2=0.$

Бұл теңдеулер көрсетілген беттердің канондық (дағдылы) теңдеулері деп аталады. Канондық теңдеулерді (1) жалпы теңдеуден координаттар жүйесін түрлендіру (координат өстерін параллель жылжыту және бұру) арқылы алуға болады. Жалпы жағдайда мұндай түрлендіру күрделі процедураны талап етеді, алайда xy, xz, yz мүшелері (1) теңдеуде жоқ болса $(a_{12}=a_{13}=a_{23}=0)$, онда канондық теңдеуді толық квадрат бөлу және координат өстерін параллель жылжыту әдістерімен алуға болады.

1)–8) екінші ретті беттердің түрлері мен қасиеттерін **параллельдік қима әдісімен** зерттеуге болады: беттер координаттық жазықтықтарға параллель жазықтықтар арқылы қиылысады да, қимада алынған сызықтықтардың түрі мен қасиеттеріне қарай беттің түрі мен қасиеттері туралы қорытынды жасалады.

Жоғарыда аталған екінші ретті беттерге тоқталайық.

1. Эллипсоид (45-сурет)**:** $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a,b,c>0. \qquad (1)$$



45-сурет

Егер $a=b=c=R$ болса, онда (1) эллипсоид – центрі координат басында, радиусі R тең сфераға айналады:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \qquad (1')$$

Мұндағы a,b,c – эллипсоидтың жарты өстері деп аталады.

(1) теңдеуден эллипсоидтың $x=0,\ y=0,\ z=0$ координат-тық жазықтықтар мен салыстырғанда және координат басымен салыстырғанда симметриялы болатынын көреміз.

Эллипсоидтың $z=h,\quad -c\le h\le c$ жазықтықтарымен қимасы-

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \text{ немесе } \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

түріндегі эллипстер. Эллипстің $a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$ – тең жарты өстері $z=0$, ($h=0$ болса, ең үлкен мәнге ие болатындықтан, бұл мәнге сәйкес эллипс те ең үлкен болады.

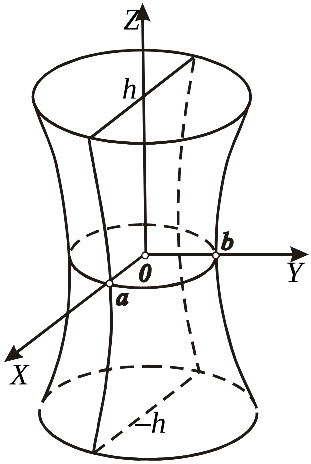
Осы сияқты жағдайлар эллипсоидттың $x=h,\ \ -a\le h\le a$ және $y=h,\ \ -b\le h\le b$ жазықтықтарымен қимасында да болады.

Эллипсоидтың $(\pm a,\ 0,\ 0),\ \ (0,\ \pm b,\ 0),(0,\ 0,\ \pm c)$ нүктелері, оның **төбелері** деп аталады.

Егер эллипсоидтың қандайда бір жарты өстері өзара тең болса, онда эллипсоид эллипстің сәйкес координат өсі арқылы айналуынан шығады да, оны **айналу эллипсоиды** деп атайды.

2. Бірқуысты гиперболид (46-сурет)**:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ a,b,c>0. \tag{2}$$



46-сурет

(2) теңдеу түрінен бірқуысты гиперболоид координаттық жазықтықтарға және координат бас нүктесімен салыстырғанда симметриялы бет екенін көреміз. a,b,c сандары бірқуысты гиперболоидтың **жарты өстері** деп аталады. Бірқуысты гиперболоидтың

$(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ нүктелері оның **төбелері** деп аталады.

Егер (2) бетті $z = h$ жазықтығымен қисақ, онда қимада $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$ түріндегі эллипс шығады;

Егер (2) бетті $x = h$ жазықтығымен қисақ, онда қимада $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} = 1$ гиперболасы шығады;

ал (2) бетті $y = h$ жазықтығымен қисақ, онда қимада $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1$ гиперболасы шығады.

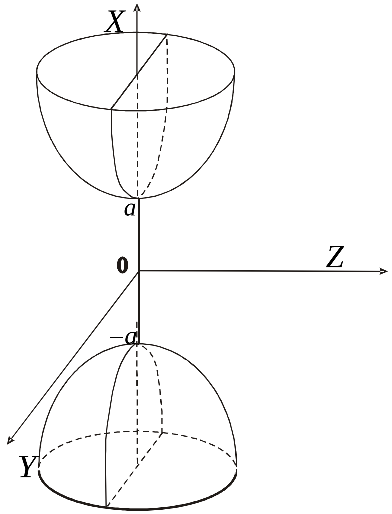
Егер $h = \pm a$ болса, онда бірінші гипербола келесі екі түзуге айналады: $y = \pm \frac{b}{c} z.$

Егер $|h| \le a$ болса, онда гиперболаның нақты симметриялы өсі OY өсіне параллель, ал $|h| > a$ болса, OZ өсіне параллель түзу болады.

Егер $a = b$ болса, онда (2) бет пен $z = h$ жазықтықтарының қимасы, радиусі $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ тең шеңбер, ал бұл жағдайда (2) бет $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболасының OZ өсін айналуынан алынады.

3. Қос қуысты гиперболоид (47-сурет)**:**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a,b,c>0. \tag{3}$$



47-сурет

Бұл теңдеуде айнымалдардың тек квадраттары ғана қатысатындықтан, берілген бет координат жазықтықтарына және координата бас нүктесімен салыстырғанда симметриялы. (3) теңдеуді

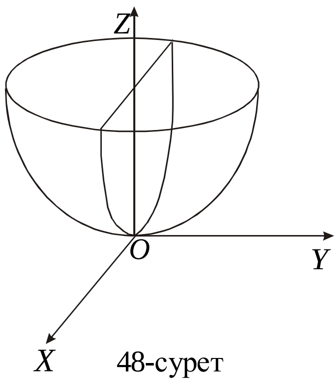
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1+\frac{x^2}{a^2} \tag{3$'$}$$

түрінде жазайық. Бұл теңдеуден $-1+\dfrac{x^2}{a^2}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x|\geq a$ аламыз.

Егер $|x| = a$ болса, онда $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ теңдеуінен $y = 0$, $z = 0$ аламыз: $(-a,0,0)$ және $(a,0,0)$ нүктелері қосқуысты гиперболоидтың төбелері деп аталады (3) беттің $|x| = h > a$ жазықтықтарымен қиылысу сызықтары $\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{-1+\dfrac{h^2}{a^2}}\right)^2}+\dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{-1+\dfrac{h^2}{a^2}}\right)^2}=1$ түріндегі эллипстер, ал оның $z = h$ және $y = h$ жазықтықтарымен қиылысу сызықтары, сәйкес $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}$ және $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1+\dfrac{h^2}{b^2}$ түрлеріндегі гиперболалар екенін көру қиын емес (42-суретте беттің $z = 0$ және $y = 0$ жазықтықтарымен қиылысуынан шыққан гиперболалар көрсетілген).

4. Эллипстік параболоид (48-сурет)**:**

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z, \qquad p,q>0. \tag{4}$$



48-сурет

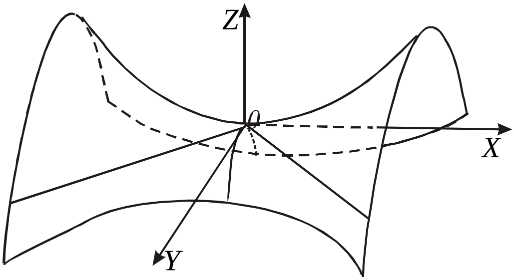
Теңдеуден беттің $z \geq 0$ жартылай кеңістігінде орналасқанын және x=0, z=0 координат жазықтықтарымен салыстырғанда сим-метриялы болатынын көреміз. Беттің $z = h$ жазықтығымен қиылысу сызығы: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{2hp}+\dfrac{y^2}{2hq}=1$ түріндегі эллипс, ал $x = h$, $y = h$ $(h \geq 0)$ жазықтықтарымен қиылысу сызықтары сәйкес $y^2=2q\left(z-\dfrac{h^2}{2p}\right)$, $x^2=2p\left(z-\dfrac{h^2}{2q}\right)$ түріндегі параболалар (парабола-лардың төбелері сәйкес $z=\dfrac{h^2}{2p}$ және $z=\dfrac{h^2}{2q}$ нүктелеріне ығысқан).

Егер $p = q$ болса, онда (4) бет $x^2=2pz$ параболасының OZ өсін айналуынан шығады, сондықтан ол ***айналу параболоиды*** деп аталады.

Ал (0,0,0) нүктесі эллипстік параболоидтың *төбесі* деп аталады.

5. Гиперболалық параболоид (49-сурет):

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ \ p,q>0. \qquad (5)$$

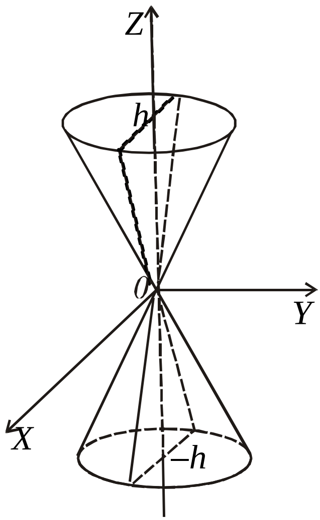


49-сурет

(5) теңдеуден берілген бет $x=0,\ \ y=0$ жазықтықтарымен салыстырғанда симметриялы екенін көреміз. (5) беттің $z=h$ жазықтығымен қимасы $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{z^2}{q}=2h$ түріндегі гипербола және егер $h>0$ болса, онда гиперболаның нақты симметрия өсі OX өсіне параллель, ал $h<0$ болса, онда OY өсіне параллель болады. $h=0$ болса қимада, қиылысатын екі түзу шығады. (5) бетті $x=h$ немесе $y=h$ жазықтықтарымен қимасы, тармақтары, сәйкес төмен және жоғары бағытталған парабола**:** $-\dfrac{y^2}{q}=2z-\dfrac{h^2}{p}$, $\quad \dfrac{x^2}{p}=2z+\dfrac{h^2}{q}$ **.**

6. Екінші ретті конус (50-сурет) :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\quad a,b,c>0. \qquad (6)$$



50-сурет

Екінші ретті конус, $x=0,\ y=0,\ z=0$ жазықтықтарына және $O(0,0,0)$ координат басымен салыстырғанда симметриялы екені түсінікті. (6)-беттің $z=h$ жазықтығымен қимасы, эллипстер:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \qquad \text{немесе} \qquad \frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2}=1.$$

Егер (6) бетті $x=h$ немесе $y=h$ жазықтықтарымен қисақ, онда қимада сәйкес $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}$ немесе $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{h^2}{b^2}$ гиперболалары алынады. Егер (6) бетті $y=hx$ жазықтықтарымен қисақ, онда қимада қиылысатын түзулер жұбын аламыз: $z=\pm Cx\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{h^2}{b^2}}.$

7. Нүкте:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{7}$$

(7) теңдеуді тек қана $x = y = z = 0$ нүктесі қанағаттандырады.

8. Екінші ретті цилиндрлер

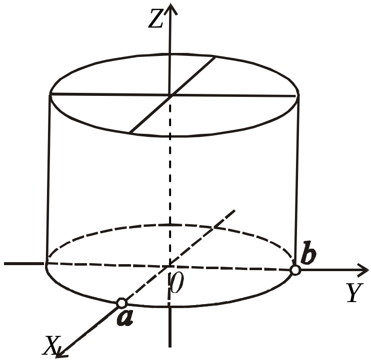
Эллипстік цилиндр (51-сурет)**:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0. \tag{8}$$

(8) теңдеу OXY жазықтығында, жарты өстері a мен b тең эллипсті анықтайды. (8) теңдеуде z айнымал шама қатыспаған. Ендеше эллипстік цилиндр беті, OXY жазықтығындағы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсі арқылы өтетін, OZ өсіне параллель түзулердің жиыны.

Анықтама. Түзудің берілген L сызығын қия отырып, берілген бағытқа қарай параллель жылжуынан құрылған бет **цилиндрлік бет** деп аталады.

(8) эллипс – беттің **бағыттаушы сызығы**, ал осы эллипс арқылы өтетін OZ-ке параллель сызық беттің **жасаушысы** деп аталады.

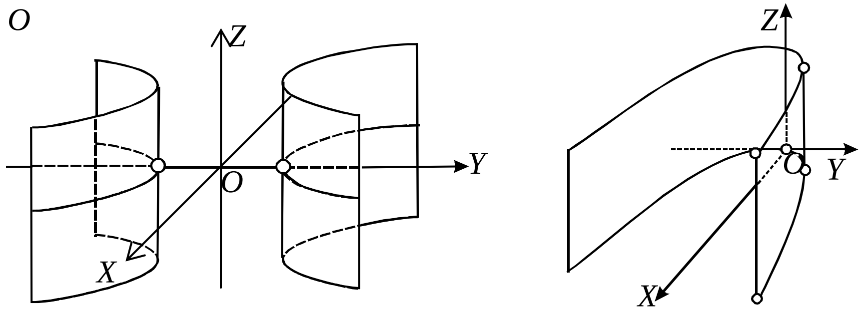


51-сурет

9. Гиперболалық және параболалық цилиндрлер (52-сурет)**:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0. \tag{9}$$

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{10}$$



52-сурет

Бұл жағдайда беттердің **бағыттаушы сызықтары** – гипербола мен парабола, ал жасаушылары, осы *OXY* жазықтығындағы гипербола мен параболадан өтетін, *OZ* өсіне параллель түзулер.

Қиылысатын жазықтықтар жұбы:

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0, \quad a, b > 0 \tag{11}$$

Параллель жазықтықтар:

$$x^2 - a^2 = 0, \quad a > 0, \tag{12}$$

Беттесетін жазықтықтар (OXY) жұбы:

$$z^2 = 0 \tag{13}$$

Түзу (OZ):

$$x^2 + y^2 = 0. \tag{14}$$

2.6–ҮТ

1. а) эллипстің; **б)** гиперболаның; **в)** параболаның канондық теңдеулерін жазу керек. Мұндағы: *A, B* – қисықта жатқан нүктелер; *F* – фокус; *a* – үлкен (нақты) өс; *в* – кіші (нақты) өс; ε – эксцентриситет; $y = \pm kx$ – гипербола асимптоталарының теңдеулері; *D*– қисық директрисасы; 2*c* – фокустардың арақашықтығы.

1.1. а) b=15, $F(-10,0)$; б) a=13, $\varepsilon = \frac{14}{13}$; в) D: x=–4.

1.2. а) b=2, $F(4\sqrt{2},0)$; б) a=7, $\varepsilon = \frac{\sqrt{85}}{7}$; в) D: x=5.

1.3. а) $A(3,0)$, $B(2, \frac{\sqrt{5}}{3})$; б) $k=\frac{3}{4}$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$; в) D: y=–2.

1.4. а) $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $A(-5,0)$; б) $A(\sqrt{80},3)$, $B(4\sqrt{6},3\sqrt{2})$; в) D: y=1.

1.5. а) $2a$=22, $\varepsilon = \frac{\sqrt{57}}{11}$; б) $k=\frac{2}{3}$, $2c=10\sqrt{13}$; в) *OX* симметрия өсі және $A(27,9)$.

1.6. а) $b=\sqrt{15}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{25}$; б) $k=\frac{3}{4}$, 2a=16; в) *OX* симметрия өсі және $A(4,-8)$.

1.7. а) a=4, F(3,0); б) $b=2\sqrt{10}$, $F(-11,0)$; в) D: x=–2.

1.8. а) b=4, $F(9,0)$; б) a=5, ε =7/5; в) D: x=6.

1.9. а) $A(0,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{\frac{14}{3}},1)$; б) $k=\frac{\sqrt{21}}{10}$, $\varepsilon = \frac{11}{10}$; в) D: y=–4.

1.10. а) ε =7/8, $A(8,0)$; б) $A(3,-\sqrt{\frac{3}{5}})$, $B(\sqrt{\frac{13}{5}},6)$; в) D: y=4.

1.11. а) $2a$=24, $\varepsilon = \frac{\sqrt{22}}{6}$; б) $k=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $2c$=10; в) *OX* симметрия өсі және $A(-7,-7)$.

1.12. а) b=2, $\varepsilon=5\dfrac{\sqrt{29}}{29}$; б) $k=\dfrac{12}{13}$, $2a$=26; в) OX симметрия өсі және $A(-5,15)$.

1.13. а) a=6, $F(-4,0)$; б) b=3, $F(7,0)$; в) D: x=–7.

1.14. а) b=7, $F(5,0)$; б) a=11, $\varepsilon=\dfrac{12}{11}$; в) D: x=10.

1.15. а) $A(-\sqrt{\dfrac{17}{3}},\dfrac{1}{3})$, $B(\dfrac{\sqrt{21}}{2},\dfrac{1}{2})$; б) $k=\dfrac{1}{2}$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; в) D: y=–1.

1.16. а) ε=3/5, $A(0,8)$; б) $A(\sqrt{6},0)$, $B(-2\sqrt{2},1)$; в) D: y=9.

1.17. а) $2a$=22, $\varepsilon=\dfrac{10}{11}$; б) $k=\dfrac{\sqrt{11}}{5}$, $2c$=12; в) OX симметрия өсі және $A(-7,5)$.

1.18. а) b=5, $\varepsilon=\dfrac{12}{3}$; б) $k=\dfrac{1}{3}$, $2a$=6; в)OY симметрия өсі және $A(-9,6)$.

1.19. а) a=9, $F(7,0)$; б) b=6, $F(12,0)$; в) D: $x=-\dfrac{1}{4}$.

1.20. а) b=5, $F(-10,0)$; б) a=9, $\varepsilon=\dfrac{4}{3}$; в) D: x=12.

1.21. а) $A(0,-2)$, $B(\dfrac{\sqrt{15}}{2},1)$; б) $k=2\dfrac{\sqrt{10}}{9}$, $\varepsilon=\dfrac{11}{9}$; в) D: y=5.

1.22. а) $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$, $A(-6,0)$; б) $A(\sqrt{8},0)$, B$(\dfrac{\sqrt{20}}{3},2)$; в) D: y=1.

1.23. а) $2a$=50, $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$; б) $k=\dfrac{\sqrt{29}}{14}$, $2c$=30; в) OY симметрия өсі және $A(4,1)$.

1.24. а) $b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=\dfrac{7}{8}$; б) $k=\dfrac{5}{6}$, $2a$=12; в) OY симметрия өсі және $A(-2,3\sqrt{2})$.

1.25. а) a=13, $F(-5,0)$; б) b=4, $F(-7,0)$; в) D: $x=-\dfrac{3}{8}$.

1.26. а) b=7, F(13,0); б) b=4, F(–11,0); в) D: x=13.

1.27. а) A(–3,0), B(1, $\frac{\sqrt{40}}{3}$); б) $k=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{15}}{3}$; в) D: y=4.

1.28. а) $\varepsilon=\frac{5}{6}$, $A(0,-\sqrt{11})$; б) $A(\sqrt{\frac{32}{3}}$,1), $B(\sqrt{8}$,0); в) D: y=–3.

1.29. а) 2a=30, $\varepsilon=\frac{17}{15}$; б) $k=\frac{\sqrt{17}}{8}$, 2c=18; в) OY симметрия өсі және A(4,–10).

1.30. а) $b=2\sqrt{2}$, $\varepsilon=\frac{7}{9}$; б) $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 2a=12; в) OY симметрия өсі және A(–45,15).

2. Центрі $A(x_0, y_0)$ нүктесі болатын және көрсетілген нүктелер арқылы өтетін шеңбер теңдеуін жазу керек.

2.1. $12x^2-13y^2=156$ гиперболасының төбесі, $A(0,-2)$.

2.2. $4x^2-9y^2=36$ гиперболасының төбесі, $A(0,4)$.

2.3. $24y^2-25x^2=600$ гиперболасының фокусы, $A(0,-8)$.

2.4. $O(0,0)$, A нүктесі $y^2=3(x-4)$ параболасының төбесі.

2.5. $9x^2+25y^2=1$ эллипсінің фокустары, $A(0,6)$.

2.6. $3x^2-4y^2=12$ гиперболасының сол жақтағы фокусы $A(0,-3)$.

2.7. $3x^2+4y^2=12$ эллипсінің фокустары, A – оның жоғарғы төбесі.

2.8. $x^2-16y^2=64$ гиперболасының төбесі, $A(0,-2)$.

2.9. $4x^2-5y^2=80$ гиперболасының фокусы, $A(0,-4)$.

2.10. $O(0,0)$, A нүктесі $y^2=\frac{-(x+5)}{2}$ параболасының төбесі.

2.11. $33x^2+49y^2=1617$ эллипсінің оң жақ фокусы, $A(1,7)$.

2.12. $3x^2-5y^2=30$ гиперболасының сол жақтағы фокусы, $A(0,6)$.

2.13. $16x^2+41y^2=656$ эллипсінің фокустары, A – оның төменгі төбесі.

2.14. $2x^2-9y^2=18$ гиперболасының төбесі, $A(0,4)$.

2.15. $5x^2-11y^2=55$ гиперболасының фокустары, $A(0,5)$.

2.16. $B(1,4)$, A нүктесі – $y^2=\dfrac{x-4}{3}$ параболасының төбесі.

2.17. $3x^2+7y^2=21$ эллипсінің сол жақ фокусы, $A(-1,-3)$.

2.18. $5x^2-9y^2=45$ гиперболасының сол жақтағы төбесі, $A(0,-6)$.

2.19. $24x^2-25y^2=600$ эллипсінің фокустары, A – оның жоғарғы төбесі.

2.20. $3x^2-16y^2=48$ гиперболасының оң жақ төбесі, $A(1,3)$.

2.21. $7x^2-9y^2=63$ гиперболасының сол жақ фокусы, $A(-1,-2)$.

2.22. $B(2,-5)$, A нүктесі $x^2=-2(y+1)$ параболасының төбесі.

2.23. $x^2+4y^2=12$ эллипсінің оң жақ фокусы, $A(2,-7)$.

2.24. $40x^2-81y^2=3240$ гиперболасының оң жақ төбесі, $A(-2,5)$.

2.25. $x^2+10y^2=90$ эллипсінің фокустары, A – оның төменгі төбесі.

2.26. $3x^2-25y^2=75$ гиперболасының оң жақ төбесі, $A(-5,-2)$.

2.27. $4x^2-5y^2=20$ гиперболасының фокустары, $A(0,-6)$.

2.28. $B(3,4)$, A нүктесі $y^2 = \frac{x+7}{4}$ параболасының төбесі.

2.29. $13x^2 + 49y^2 = 837$ эллипсінің сол жақ фокусы, $A(1,8)$.

2.30. $57x^2 - 64y^2 = 3648$ гиперболасының оң жақ фокусы, $A(2,8)$.

3. Әрбір *M* нүктесі берілген шарттарды қанағаттанды-ратын сызықтың теңдеуін табу керек.

3.1. $x = -6$ түзуінен қашықтығы $A(1,3)$ нүктесімен салыс-тырғанда екі есе үлкен.

3.2. $x = -2$ түзуінен қашықтығы $A(4,0)$ нүктесімен салыс-тырғанда екі есе үлкен.

3.3. $y = -2$ түзуінен қашықтығы $A(5,0)$ нүктесімен салыс-тырғанда үш есе үлкен.

3.4. M нүктесінен $A(2,3)$ және $B(-1,2)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының қатынасы $\frac{3}{4}$ -ке тең.

3.5. M нүктесінен $A(4,0)$ және $B(-2,2)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының квадраттарының қосындысы 28-ге тең.

3.6. $A(1,0)$ нүктеден қашықтығы $x = 8$ түзуімен салыстырғанда бес есе кіші.

3.7. $A(4,1)$ нүктеден қашықтығы $B(-2,-1)$ нүктесімен салыстыр-ғанда төрт есе үлкен.

3.8. $x = -5$ түзуінен қашықтығы $A(6,1)$ нүктесімен салыс-тырғанда үш есе үлкен.

3.9. $y = 7$ түзуінен қашықтығы $A(4,-3)$ нүктесімен салыс-тырғанда бес есе үлкен.

3.10. M нүктесінен $A(-3,5)$ және $B(4,2)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының қатынасы $\frac{1}{3}$ -ке тең.

3.11. M нүктесінен $A(-5,-1)$ және $B(3,2)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының квадраттарының қосындысы 40,5-ке тең.

3.12. $A(2,1)$ нүктеден қашықтығы $x=-5$ түзуімен салыстырғанда үш есе үлкен.

3.13. А(–3,3) нүктеден қашықтығы $B(5,1)$ нүктесімен салыстырғанда үш есе үлкен.

3.14. $x=8$ түзуінен қашықтығы А(–1,7) нүктесімен салыстырғанда екі есе үлкен.

3.15. $x=9$ түзуінен қашықтығы А(–1,2) нүктесімен салыстырғанда төрт есе кіші.

3.16. M нүктесінен $A(2,-4)$ және $B(3,5)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының қатынасы $\frac{2}{3}$-ке тең.

3.17. M нүктесінен А(–3,3) және $B(4,1)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының квадраттарының қосындысы 31-ге тең.

3.18. $A(0,-5)$ нүктеден қашықтығы $x=3$ түзуімен салыстырғанда екі есе кіші.

3.19. $A(4,-2)$ нүктеден қашықтығы $B(1,6)$ нүктесімен салыстырғанда екі есе кіші.

3.20. $x=-7$ түзуінен қашықтығы $A(1,4)$ нүктесімен салыстырғанда үш есе кіші.

3.21. $x=14$ түзуінен қашықтығы $A(2,3)$ нүктесімен салыстырғанда екі есе кіші.

3.22. M нүктесінен $A(3,-2)$ және $B(4,6)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының қатынасы $\frac{3}{5}$-ке тең.

3.23. M нүктесінен $A(-5,3)$ және $B(2,-4)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының квадраттарының қосындысы 65-ке тең.

3.24. $A(3,-4)$ нүктеден қашықтығы $x=5$ түзуімен салыстырғанда үш есе үлкен.

3.25. $A(5,7)$ нүктеден қашықтығы $B(-2,1)$ нүктесімен салыстырғанда төрт есе үлкен.

3.26. $x=2$ түзуінен қашықтығы $A(4,-3)$ нүктесімен салыстырғанда бес есе үлкен.

3.27. $x=-7$ түзуінен қашықтығы $A(3,1)$ нүктесімен салыстырғанда үш есе кіші.

3.28. M нүктесінен $A(3,-5)$ және $B(4,1)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының қатынасы $\frac{1}{4}$-ке тең.

3.29. M нүктесінен $A(-1,2)$ және $B(3,-1)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының квадраттарының қосындысы 18,5-ке тең.

3.30. $A(1,5)$ нүктеден қашықтығы $x=-1$ түзуімен салыстырғанда төрт есе кіші.

4. Теңдеуі полярлық координаттар арқылы берілген қисықты салу керек.

4.1. $\rho=2\sin 4\varphi$.

4.2. $\rho=2(1-\sin 2\varphi)$.

4.3. $\rho=2\sin 2\varphi$.

4.4. $\rho=3\sin 6\varphi$.

4.5. $\rho=2/(1+\cos\varphi)$.

4.6. $\rho=3(1+\sin\varphi)$.

4.7. $\rho=2(1-\cos\varphi)$.

4.8. $\rho=3(1-\cos 2\varphi)$.

4.9. $\rho=4\sin 3\varphi$.

4.10. $\rho=4\sin 4\varphi$.

4.11. $\rho=3(\cos\varphi+1)$.

4.12. $\rho=1/(2-\sin\varphi)$.

4.13. $\rho=5(1-\sin 2\varphi)$.

4.14. $\rho=3(2-\cos\varphi)$.

4.15. $\rho=6\sin 4\varphi$.

4.16. $\rho=2\cos 6\varphi$.

4.17. $\rho=3/(1-\cos 2\varphi)$.

4.18. $\rho=2(1-\cos 3\varphi)$.

4.19. $\rho=3(1-\cos 4\varphi)$.

4.20. $\rho=5(2-\sin\varphi)$.

4.21. $\rho=3\sin 4\varphi$.

4.22. $\rho=2\cos 4\varphi$.

4.23. $\rho=4(1+\cos 2\varphi)$.

4.24. $\rho=1/(2-\cos 2\varphi)$.

4.25. $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

4.26. $\rho=3(1+\cos 2\varphi)$.

4.27. $\rho=3\cos 2\varphi$.

4.28. $\rho=2\sin 3\varphi$.

4.29. $\rho=2/(2-\cos\varphi)$.

4.30. $\rho=2-\cos 2\varphi$.

5. Параметрлік теңдеулермен берілген қисықты салу керек ($0 \le t \le 2\pi$).

5.1. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x = 2\sin t, \\ y = 3(1-\cos t). \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 1-\sin t. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 2\sin 2t. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2(1-\sin t). \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x = 4\cos 3t, \\ y = 2\sin 3t. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3(2-\sin t). \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$ **5.24.** $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$ **5.26.** $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} x = 5\cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$ **5.28.** $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4(1-\sin t). \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$ **5.30.** $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

2.6–ҮТ орындау үлгісі

а) Үлкен жарты өсі 3-ке тең, ал фокусы $F\left(\sqrt{5},0\right)$ нүктесі болатын эллипстің;

б) жорамал жарты өсі 2-ге тең және фокусы $F\left(-\sqrt{13},0\right)$ болатын гиперболаның;

в) директрисасы $x=-3$ болатын параболаның теңдеулерін жазу керек.

► **а)** Эллипстің канондық теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ Шарт бойынша: $a=3,\ c=\sqrt{5}.$ Эллипс үшін $b^2=a^2-c^2$ теңдігі орындалады: $b^2=3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=4.$ Эллипс теңдеуі: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

б) Гиперболаның канондық теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$ Есеп шарты бойынша $b=2,\ c=\sqrt{13}.$ Гипербола үшін $b^2=c^2-a^2$ теңдігі орындалады: $a^2=c^2-b^2=\left(\sqrt{13}\right)^2-2^2=9.$ Гипербола теңдеуі: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1.$

в) Бұл жағдайдағы парабола теңдеуі: $y^2 = 2px,$ ал оның директрисасы $x = -\frac{p}{2}.$ Есеп шарты бойынша $x = -3,$ сондықтан $-\frac{p}{2} = -3,$ $p = 6.$ Парабола теңдеуі: $y^2 = 12x.$ ◄

2. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипсінің фокусы арқылы өтетін және оның жоғарғы төбесі центр болатын шеңбер теңдеуін жазу керек.

► Берілген $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ эллипсінің жоғарғы төбесі $A(0,1),$ $a = 2,$ $b = 1.$ Сондықтан $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ және фокустары $F_1\left(-\sqrt{3},0\right),$ $F_2\left(\sqrt{3},0\right).$ Шеңбердің R радиусін екі нүктенің арақашықтығының формуласы бойынша табамыз:

$$R = |AF_1| = |AF_2| = \sqrt{\left(\mp\sqrt{3} - 0\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Шеңбер теңдеуін (§2.14, эллипске қатысты 3-ескертуді қара-ңыз) жазамыз:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \quad \text{немесе } x^2 + (y-1)^2 = 4. \quad ◄$$

3. Сызықтың әрбір M нүктесінен $A(3,2)$ нүктесіне дейінгі қашықтық осы M нүктеден $B(-1,0)$ нүктесіне дейінгі қашықтықтан 3 есе үлкен. Сызықтың теңдеуін табу керек (53- сурет).

► Сызықтың кез келген нүктесі $M(x,y)$ болсын. Онда шарт бойынша $|AM| = 3|BM|.$ Мұнда

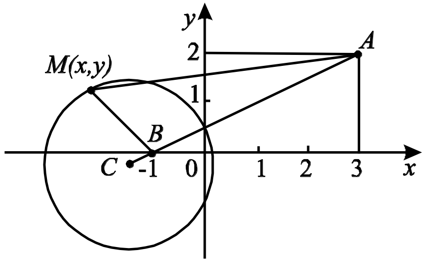
$$|AM| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}, \quad |BM| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

болғандықтан, $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ аламыз. Бұл теңдіктің екі жағын квадраттап түрлендіреміз:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2,$$

$$8x^2 + 24x + 8y^2 + 4y - 4 = 0.$$

Бұл - центрі $C\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$ және радиусі $R=\frac{3\sqrt{5}}{4}$ тең шеңбер (53-сурет). (§2.14, эллипске қатысты 3-ескертуді қараңыз). ◄



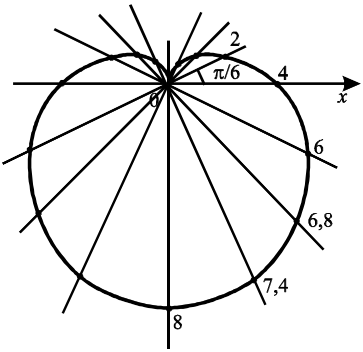
53-сурет

4. Теңдеуі полярлық координаттар арқылы берілген кардиоиданы салу керек: $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

► φ_i $\left(i=\overline{1,16}\right)$ полярлық бұрыш мәндері және оларға сәйкес полярлық радиус ρ_i мәндері арқылы кесте құраймыз:

φ	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	4	$\pi/$	0	π	4	$3\pi/$	8
π	2	2π	≈ 0	7π	6	$5\pi/$	≈ 7
π	≈ 1	3π	≈ 1	5π	≈ 6	$7\pi/$	≈ 6
π	≈ 0	5π	2	4π	≈ 7	11π	6

Табылған $M_i(\rho_i,\varphi_i)$ нүктелерін жатық тегіс сызықтармен жалғай отырып, кардиоиданың пішімін аламыз (54-сурет).



54-сурет

5. Параметрлік теңдеулермен берілген қисықты салу керек: $\begin{cases} x = 1 + 3\cos t, \\ y = 2 - 2\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

► t_i параметрінің мәндер санын жеткілікті етіп алып, оларға сәйкес x_i, y_i мәндерін есептейміз және декарт координаттарында алынған $M_i(x_i, y_i)$ нүктелерді саламыз. Оларды жатық тегіс сызықпен қосамыз. Алынған қисық жарты өстері $a = 3,\ b = 2$ тең, центрі $C(1,2)$ нүктесінде болатын эллипс екенін байқауға болады. Шынында да, егер берілген теңдеулерден t параметрін шығарып тастасақ: $\frac{x-1}{3} = \cos t,\ \frac{y-2}{-2} = \sin t$ (теңдеулердің екі жағын квадрат-тап, оларды мүшелеп қосамыз) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1,$ дәл сол эллипс шығады. ◄

2.7–ҮТ

1.

Берілген теңдеуді: **а)** канондық түрге келтіру керек; **ә)** теңдеуді канондық түрге келтіруші, координаттарды түрлендіру формулаларын табу керек.

1.1. $3x^2+4xy+4y^2=3.$ **1.2.** $10x^2+6\sqrt{2}xy+3y^2=8.$

1.3. $10x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2=6.$ **1.4.** $10x^2+6\sqrt{3}xy+4y^2=7.$

1.5. $10x^2+8xy+4y^2=9.$ **1.6.** $10x^2-8xy+4y^2=3.$

1.7. $3x^2-4xy+4y^2=7.$ **1.8.** $10x^2-6\sqrt{2}xy+3y^2=5.$

1.9. $10x^2-6\sqrt{3}xy+4y^2=1.$ **1.10.** $10x^2-4\sqrt{2}xy+3y^2=3.$

1.11. $3x^2+12xy-2y^2=3.$ **1.12.** $3x^2-12xy-2y^2=7.$

1.13. $3x^2-10\sqrt{2}xy-2y^2=3.$ **1.14.** $3x^2+10\sqrt{2}xy-2y^2=7.$

1.15. $3x^2+2\sqrt{66}xy-2y^2=3.$ **1.16.** $3x^2-2\sqrt{66}xy-2y^2=9.$

1.17. $3x^2+4\sqrt{21}xy-2y^2=5.$ **1.18.** $3x^2-4\sqrt{21}xy-2y^2=9.$

1.19. $2x^2+6xy+4y^2=5.$ **1.20.** $2x^2-6xy+4y^2=3.$

1.21. $x^2+2\sqrt{6}xy+5y^2=5.$ **1.22.** $x^2-2\sqrt{6}xy+5y^2=7.$

1.23. $2x^2+2\sqrt{7}xy+8y^2=3.$ **1.24.** $2x^2-2\sqrt{7}xy+8y^2=9.$

1.25. $3x^2+4\sqrt{3}xy+7y^2=5.$ **1.26.** $3x^2-4\sqrt{3}xy+7y^2=7.$

1.27. $5x^2+8xy+5y^2=3.$ **1.28.** $5x^2-8xy+5y^2=7.$

1.29. $x^2+8xy+7y^2=5.$ **1.30.** $x^2-8xy+7y^2=5.$

2.

Берілген теңдеу бойынша қисықтың түрін анықтау керек және теңдеуді канондық түрге келтіру керек.

2.1. $3x^2+4xy+4y^2+2x-4=0.$

2.2. $10x^2+6\sqrt{2}xy+3y^2-3y-4=0.$

2.3. $10x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2-4x-6=0.$

2.4. $10x^2 + 6\sqrt{3}xy + 4y^2 - 2x + y - 7 = 0.$

2.5. $10x^2 + 8xy + 4y^2 - 4x - y - 9 = 0.$

2.6. $10x^2 - 8xy + 4y^2 + 6x - 2y - 3 = 0.$

2.7. $3x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 4y - 7 = 0.$

2.8. $10x^2 - 6\sqrt{2}xy + 3y^2 + 4x + 4y - 5 = 0.$

2.9. $10x^2 - 6\sqrt{3}xy + 4y^2 - x - y - 7 = 0.$

2.10. $10x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 - 8x - 8y - 5 = 0.$

2.11. $3x^2 + 12xy - 2y^2 + x + y - 3 = 0.$

2.12. $3x^2 - 12xy - 2y^2 + 4x + 2y - 2 = 0.$

2.13. $3x^2 - 10\sqrt{2}xy - 2y^2 + 2x + 2y - 3 = 0.$

2.14. $3x^2 + 10\sqrt{2}xy - 2y^2 - 8x - y - 9 = 0.$

2.15. $3x^2 + 2\sqrt{66}xy - 2y^2 + x - y - 3 = 0.$

2.16. $3x^2 - 2\sqrt{66}xy - 2y^2 - 6x - 6y - 9 = 0.$

2.17. $3x^2 + 4\sqrt{21}xy - 2y^2 + 8x - 2y - 5 = 0.$

2.18. $3x^2 - 4\sqrt{21}xy - 2y^2 - 3x - 3y - 7 = 0.$

2.19. $2x^2 + 6xy + 4y^2 - x + 8y - 9 = 0.$

2.20. $2x^2 - 6xy + 4y^2 - 6x - 4y - 9 = 0.$

2.21. $x^2 + 2\sqrt{6}xy + 5y^2 + 4x + 2y - 7 = 0.$

2.22. $x^2 - 2\sqrt{6}xy + 5y^2 - 3x - 6y - 9 = 0.$

2.23. $2x^2 + 2\sqrt{7}xy + 8y^2 - 9x - 3y - 8 = 0.$

2.24. $2x^2 - 2\sqrt{7}xy + 8y^2 + 3x + 5y - 7 = 0.$

2.25. $3x^2 + 4\sqrt{3}xy + 7y^2 - 5x - 3y - 8 = 0.$

2.26. $3x^2 - 4\sqrt{3}xy + 7y^2 + 2x + 4y - 7 = 0.$

2.27. $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x + 6y - 1 = 0.$

2.28. $5x^2 - 8xy + 5y^2 + 8x + 6y - 5 = 0.$

2.29. $x^2+8xy+7y^2-3x-2y-6=0.$

2.30. $x^2-8xy+7y^2-4x-2y-9=0.$

2.7–ҮТ орындау үлгісі

1. Берілген теңдеуді **а)** канондық түрге келтіру керек;

ә) теңдеуді канондық түрге келтіруші, координаттарды түрлендіру формулаларын табу керек: $10x^2+2\sqrt{7}xy+4y^2=33.$

▼ **а)** Теңдеудің сол жағындағы квадраттық тұлғада $A=10,\ B=\sqrt{7},\ C=4$ (§2.15, 2п. қараңыз). Сипаттаушы теңдеуді жазамыз (§ 2.15 (21) қараңыз): $\begin{vmatrix} 10-\lambda & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 4\text{-}\lambda \end{vmatrix}=0.$ Анықтауышты ашып жазамыз және шыққан квадрат теңдеудің түбірлерін (сипаттаушы сандарды) табамыз: $\lambda^2-14\lambda+33=0.$ $\lambda_1=11,\ \lambda_2=3.$ Квадраттық тұлға, § 2.15. (8) формула бойынша, $10x^2+2\sqrt{7}xy+4y^2=11x_1^2+3y_1^2$ түріне келетіндіктен, канондық теңдеу $11x_1^2+3y_1^2=33$ немесе $\dfrac{x_1^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\dfrac{y_1^2}{\left(\sqrt{11}\right)^2}=1.$ Бұл - жарты өстері $a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{11}$ болатын эллипс.

ә) Енді ***канондық түрге келтіруші түрлендіру формулаларын*** табайық. Ол үшін §2.15 (20)-жүйені жазамыз: $\begin{cases}(10-\lambda)l+\sqrt{7}m=0,\\ \sqrt{7}l+\left(4-\lambda\right)m=0.\end{cases}$

Алдымен мұнда $\lambda=\lambda_1=11$ деп алсақ, $\begin{cases}\left(10-11\right)l+\sqrt{7}m=0,\\ \sqrt{\ }\,l+\left(4-11\right)m=0\end{cases}$ аламыз. Жүйеде бірдей екі теңдеу тұрғандықтан оны келесі теңдеуге ауыстырамыз: $l-\sqrt{7}m=0.$ Бұл теңдеудің қандай да бір шешімін, мысалы, $l=1,\ m=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ алып, оны вектор түрінде жазамыз $\left\{1;\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right\}$. Бұл векторды бірлік векторға келтіріп $\lambda_1=11$ сипаттаушы санға сәйкес бас бағытты аламыз: $\vec{k}_1=\left\{\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}};\ \dfrac{1}{\sqrt{8}}\right\}$. Енді $\lambda=\lambda_2=3$ деп алсақ, жоғарыдағы жүйе келесі түрге келеді: $\begin{cases}7l+\sqrt{7}m=0,\\ \sqrt{7}l+m=0.\end{cases}$ Бұл жүйе келесі теңдеуге парапар: $7l+\sqrt{7}m=0$. Оның бір шешімін, мысалы, $l=1,\ m=-\dfrac{7}{\sqrt{7}}$ алып, одан келесі векторды құраймыз: $\left\{1;-\dfrac{7}{\sqrt{7}}\right\}$. Бұл векторды бірлік векторға келтіреміз: $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{8}};\ \dfrac{-\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\right\}$. Алынған бірлік вектор § 2.15 (13) шартты қанағаттандырмайтындықтан (тексеріңіз) оны -1-ге көбейтіп, $\lambda_2=5$ сипаттаушы санға сәйкес ***бағытты*** табамыз: $\vec{k}_2=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{8}};\ \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\right\}$. Сонымен, жаңа өстерге өту формулалары мынандай: $x=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}x_1-\dfrac{1}{\sqrt{8}}y_1,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{8}}x_1+\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}y_1.$ ▲

2. Берілген теңдеу бойынша қисықтың түрін анықтау керек және теңдеуді канондық түрге келтіру керек: $10x^2+2\sqrt{7}xy+4y^2-4x+2y-12=0.$

▼ Мұнда $A=10,\ B=\sqrt{7},\ C=4$ бойынша $\delta=AC-B^2$ өрнегінің таңбасын анықтаймыз:

$\delta=AC-B^2=10\cdot 4-\left(\sqrt{7}\right)^2=33>0.$ Демек, берілген теңдеу,

§2.15(24) теңдеуге қатысты қорытынды бойынша, эллипсті анықтайды.

Бұл теңдеудегі квадраттық тұлға **1**-есептегі теңдеудің квадраттық тұлғасымен бірдей: $10x^2+2\sqrt{7}xy+4y^2=11x_1^2+3y_1^2$.

Сонымен бірге, бұл түрге келтіруші түрлендіру формулалары: $x=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}x_1-\frac{1}{\sqrt{8}}y_1, \quad y=\frac{1}{\sqrt{8}}x_1+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}y_1$ бойынша (**1**-есепті қараңыз),

$$-4x+2y=-4\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}x_1-\frac{1}{\sqrt{8}}y_1\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}x_1+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}y_1\right)=$$

$=\frac{2-4\sqrt{7}}{\sqrt{8}}x_1+\frac{4+2\sqrt{7}}{\sqrt{8}}y_1$ теңдігін ескеріп берілген теңдеуді келесі түрде жазамыз

$11x_1^2+3y_1^2+\frac{2-4\sqrt{7}}{\sqrt{8}}x_1+\frac{4+2\sqrt{7}}{\sqrt{8}}y_1-12=0.$ Енді бұл теңдеуден x_1, y_1 айнымалдарына қатысты толық квадратқа дейін толтыра отырып

$$\frac{\left(x_1-\frac{2\sqrt{7}-1}{11\sqrt{8}}\right)^2}{\frac{1673-4\sqrt{7}}{1452}}+\frac{\left(y_1+\frac{2+\sqrt{7}}{3\sqrt{8}}\right)^2}{\frac{1673-4\sqrt{7}}{396}}=1$$

түріндегі эллипс теңдеуін аламыз. ▲

2.8–ҮТ

1. Бетті салу керек және оның түрін анықтау керек

1.1.	а) $4x^2-y^2-16z^2+16=0$;	б) $x^2+4z=0$.
1.2.	а) $3x^2+y^2+9z^2-9=0$;	б) $x^2+2y^2-2z=0$.
1.3.	а) $-5x^2+10y^2-z^2+20=0$;	б) $y^2+4z^2=5x^2$.
1.4.	а) $4x^2-8y^2+z^2+24=0$;	б) $x^2-y=-9z^2$.
1.5.	а) $x^2-6y^2+z^2=0$;	б) $7x^2-3y^2-z^2=21$.
1.6.	а) $z=8-x^2-4y^2$;	б) $4x^2+9y^2+36z^2=72$.
1.7.	а) $4x^2+6y^2-24z^2=96$;	б) $y^2+8z^2=20x^2$.
1.8.	а) $4x^2-5y^2-5z^2+40=0$;	б) $y=5x^2+3z^2$.

1.9. а) $x^2=8(y^2+z^2)$; б) $2x^2+3y^2-z^2=18$.
1.10. а) $5z^2+2y^2=10x$; б) $4z^2-3y^2-5x^2+60=0$.
1.11. а) $x^2-7y^2-14z^2-21=0$; б) $2y=x^2+4z^2$.
1.12. а) $6x^2-y^2+3z^2-12=0$; б) $8y^2+2z^2=x$.
1.13. а) $-16x^2+y^2+4z^2-32=0$; б) $6x^2+y^2-3z^2=0$.
1.14. а) $5x^2-y^2-15z^2+15=0$; б) $x^2+3z=0$.
1.15. а) $6x^2+y^2+6z^2-18=0$; б) $3x^2+y^2-3z=0$.
1.16. а) $-7x^2+14y^2-z^2+21=0$; б) $y^2+2z^2=6x^2$.
1.17. а) $-3x^2+6y^2-z^2-18=0$; б) $x^2-2y=-z^2$.
1.18. а) $4x^2-6y^2+3z^2=0$; б) $4x^2-y^2-3z^2=12$.
1.19. а) $z=4-x^2-y^2$; б) $3x^2+12y^2+4z^2=48$.
1.20. а) $4x^2+5y^2-10z^2=0$; б) $7y^2+z^2=14x^2$.
1.21. а) $9x^2-6y^2-6z^2+1=0$; б) $15y=10x^2+6y^2$.
1.22. а) $x^2=5(y^2+z^2)=0$; б) $2x^2+3y^2-z^2=36$.
1.23. а) $4x^2+3y^2=12x$; б) $3x^2-4y^2-2z^2+12=0$.
1.24. а) $8x^2-y^2-2z^2-32=0$; б) $y-4z^2=3x^2$.
1.25. а) $x^2-6y^2+z^2-12=0$; б) $x-3z^2=9y^2$.
1.26. а) $2x^2-3y^2-5z^2+30=0$; б) $2x^2+3z=0$.
1.27. а) $7x^2+2y^2+6z^2-42=0$; б) $2x^2+4y^2-5z=0$.
1.28. а) $-4x^2+12y^2-3z^2+24=0$; б) $2y^2+6z^2=3x$.
1.29. а) $3x^2-9y^2+z^2+27=0$; б) $z^2-2y=-4x^2$.
1.30 а) $27x^2-63y^2+21z^2=0$; б) $3x^2-7y^2-2z^2=42$.

2. Берілген сызықтың көрсетілген өстен айналуынан шыққан беттің түрін анықтап, оның теңдеуін жазу керек және беттің суретін салу керек.

2.1. а) $y^2=2z$, Oz; б) $9y^2+4z^2=36$, Oy.
2.2. а) $4x^2-3y^2=12$, Ox; б) $x=1$, $y=2$, Oz.
2.3. а) $x^2=-3z$, Oz; б) $3x^2+5z^2=15$, Ox.
2.4. а) $3y^2-4z^2=12$, Oz; б) $y=4$, $z=2$, Ox.
2.5. а) $x^2=3y$, Oy; б) $3x^2+4z^2=24$, Oz.
2.6. а) $2x^2-6y^2=12$, Ox; б) $y^2=4z$, Oz.
2.7. а) $x^2+3z^2=9$, Oz; б) $x=4$, $z=6$, Oy.
2.8. а) $3x^2-5z^2=15$, Oz; б) $y=3$, $z=-1$, Ox.
2.9. а) $y^2=3z$, Oz; б) $2x^2+3z^2=6$, Ox.
2.10. а) $y^2-5x^2=5$, Oy; б) $y=3$, $z=1$, Ox.
2.11. а) $x^2=-4z$, Oz; б) $y^2+4z^2=4$, Oy.

2.12. а) $5x^2-6z^2=30$, Ox; б) $x=3$, $z=-2$, Oy.
2.13. а) $z^2=2y$, Oy; б) $2x^2+3z^2=6$, Oz.
2.14. а) $y^2=-4z$, Oz; б) $3y^2+z^2=6$, Oy.
2.15. а) $7x^2-5y^2=35$, Ox; б) $x=-1$, $y=-3$, Oz.
2.16. а) $2x^2=z$, Oz; б) $x^2+4z^2=4$, Ox.
2.17. а) $2y^2-5z=10$, Oz; б) $y=2$, $z=6$, Ox.
2.18. а) $x^2=-5y$, Oy; б) $2x^2+3z=6$, Oz.
2.19. а) $x^2-9y^2=9$, Ox; б) $3y^2=z$, Oz.
2.20. а) $x^2+2z=4$, Oz; б) $x=3$, $z=-1$, Oy.
2.22. а) $y^2=5z$, Oz; б) $3x^2+7y^2=21$, Ox.
2.23. а) $15y^2-x^2=6$, Oy; б) $y=5$, $z=2$, Oy.
2.24. а) $5z=-x^2$, Oz; б) $3y^2+18z^2=1$, Oy.
2.25. а) $3x^2-8y^2=288$, Ox; б) $x=5$, $z=-3$, Oy.
2.26. а) $2y^2=72$, Oz; б) $6y^2+5z^2=30$, Oy.
2.27. а) $5x^2-7y^2=35$, Ox; б) $x=2$, $y=-4$, Oz.
2.28. а) $3x^2=-2z$, Oz; б) $8x^2+11z^2=88$, Ox.
2.29. а) $5y^2-8z^2=40$, Oz; б) $y=3$, $z=1$, Ox.
2.30. а) $3x^2=-4y$, Oz; б) $4x^2+3z^2=12$, Oz.

3. Көрсетілген беттермен шенелген денені салу керек.

3.1. а) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $x=0$, $y=0$;
б) $x^2+y^2=2x$, $z=0$, $z=x$.
3.2. а) $x^2+y^2=z^2$, $z=0$, $y=2x$, $y=4x$, $x=3$, $(z>0)$;
б) $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $y+z=5$.
3.3. а) $y^2+3z^2=6$, $3x^2-25y^2=75$, $z\geq 0$;
б) $x=4$, $y=2$, $x+2y+3z=12$, $x=0$, $y=0$, $z\geq 0$.
3.4. а) $z=5y$, $x^2+y^2=16$, $z=0$;
б) $x+y+z=5$, $3x+y=5$, $2x+y=5$, $y=0$, $z=0$.
3.5. а) $y=3x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$;
б) $8(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.
3.6. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=x^2+5y^2$, $z=0$;
б) $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2\leq 1$, $x\geq 0$.
3.7. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$;
б) $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $x\geq 0$, ≥ 0.
3.8. а) $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$;
б) $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

3.9. а) $z=x^2+3y^2$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=1$;
б) $z=8(x^2+y^2)+3$, $z=16x+3$.

3.10. а) $y=4x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$;
б) $z=3\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2-x^2-y^2$.

3.11. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=3x^2+2y^2$, $z=0$;
б) $z=10(x^2+y^2)+1$, $z=1-20y$.

3.12. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$;
б) $y=16\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=2$.

3.13. а) $y=x$, $y=0$, $z=2$, $z=0$;
б) $x+y=2$, $x=\sqrt{y}$, $z=2x$, $z=0$.

3.14. а) $2z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=2$, $y=3$, $x=0$, $y=0$;
б) $x^2+y^2=4x$, $z=0$, $z=x$.

3.15. а) $x^2+y^2=4z^2$, $z=0$, $y=x$, $y=8x$, $x=2$, $z>0$;
б) $x^2+y^2=8y$, $z=0$, $y+z=6$.

3.16. а) $y^2+4z^2=8$, $16x^2-49y^2=784$, $z\geq 0$;
б) $x=1$, $y=3$, $x+5y+10z=20$, $x=0$, $y=0$, $z\geq 0$.

3.17. а) $z=3y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$;
б) $x+2y+3z=6$, $2x=y$, $2x+3y=6$, $y=0$, $z=0$.

3.18. а) $y=4x$, $y=0$, $x=1$, $z=xy$, $z=0$;
б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

3.19. а) $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $z=2x^2+y^2$, $z=0$;
б) $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2\leq 4$, $x\geq 0$.

3.20. а) $y=4x$, $y=0$, $x=4$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$;
б) $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+z^2=y^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

3.21. а) $y=3x$, $y=0$, $x=3$, $z=xy$, $z=0$;
б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $4(x^2+y^2)=1$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

3.22. а) $z^2=16x^2+y^2$, $z=0$, $y=2x$, $y=0$, $x=1$;
б) $z-4=6(x^2+y^2)$, $z=4x+1$.

3.23. а) $y=3x$, $y=0$, $x=3$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$;
б) $z=4\sqrt{x^2+y^2}$, $z=5-x^2-y^2$.

3.24. а) $y=3x$, $y=0$, $x=2$, $z=x^2+y^2$, $z=0$;
б) $z-2=6(x^2+y^2)$, $z=1-4y$.

3.25. а) $y=2x$, $y=0$, $x=4$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$;

б) $x+y=2$, $y=\sqrt{x}$, $z=12y$, $x=0$, $z=0$.

3.26. а) $z=2x^2+3y^2$, $z=0$, $x=2$, $y=1$, $x=0$, $y=0$;

б) $x^2+y^2=6x$, $z=0$, $z=2x$.

3.27. а) $4(x^2+y^2)=z^2$, $z=0$, $y=x$, $y=4x$, $x=2$, $(z>0)$;

б) $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $y+z=6$.

3.28. а) $2y^2+z^2=4$, $3x^2-8y^2=48$, $z\geq 0$;

б) $x=1$, $y=3$, $x+2y+4z=24$, $x=0$, $y=0$, $z\geq 0$.

3.29. а) $z=3y^2$, $x^2+y^2=9$, $z=0$;

б) $x+y+z=8$, $x+2y=4$, $x+4y=4$, $y=0$, $z=0$.

3.30. а) $y=5x$, $y=0$, $x=3$, $z=0$;

б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

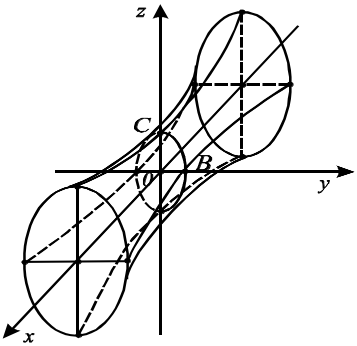
2.8–ҮТ орындау үлгісі

1. Берілген бетті салу керек және оның түрін анықтау керек:

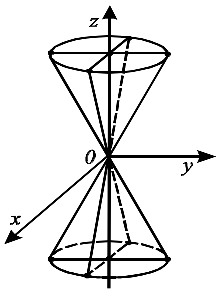
а) $-\dfrac{x^2}{6}+4y^2+\dfrac{1}{2}z^2-2=0$; б) $3x^2+\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{z^2}{4}=0$.

►**а)** Теңдеуді канондық түрге келтіреміз: $-\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{z^2}{4}=1.$

55-суретте көрсетілген гиперболоид теңдеуін алдық.



55-сурет



56-сурет

б) Теңдеуді канондық түрге келтіреміз: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0.$

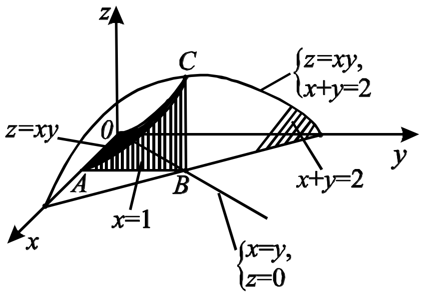
56-суретте көрсетілген екінші ретті конус теңдеуін алдық. Оның $z=const$ жазықтықтармен қималары – эллипстер.

3. Берілген беттермен шенелген денені салу керек:

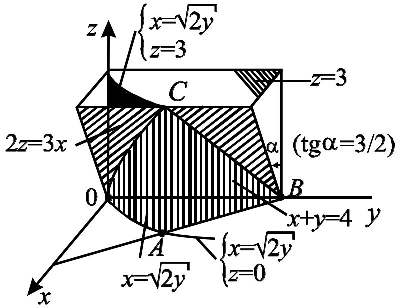
а) $y=x,\ \ x=1,\ \ z=0,\ \ z=xy;$

б) $x+y=4,\ \ x=\sqrt{2y},\ 3x=2z,\ z=0.$

► **а)** 57-суретте салу жұмысы көрсетілген: мұндағы OC– гиперболалық параболоид $z=xy$ пен $x=y$ жазықтығының қиылысуынан шыққан парабола доғасы; $\breve{AC}$ арқылы $z=xy$ бетінің $x=1$ жазықтығымен қиылысу сызығы белгіленген; $A(1{,}0{,}0)$, $B(1{,}1{,}0)$, $C(1{,}1{,}1)$ – дененің негізгі сипаттаушы нүктелері;



57-сурет



58-сурет

б) Салу жұмысы 58-суретте көрсетілген: мұндағы OC– параболалық $x=\sqrt{2y}$ цилиндрдің $2z=3x$ жазықтығымен қиылысуынан шыққан парабола доғасы; $A(2,2,0), B(0,4,0),\ \ C(2,2,3)$ – дененің негізгі нүктелері. ◄

3. ЖОҒАРЫ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

§ 3.1. Комплекс сандар

Комплекс сан деп, теңдік ұғымы мен арифметикалық амалдар төмендегі 1)–4) ережелермен анықталған, $x+yi$ (немесе $x+iy$) түріндегі өрнекті айтады. Ықшамдылық үшін, комплекс санды бір әріппен белгілейді: $z=x+yi,$ мұндағы x,y – нақты сандары z санының сәйкес **нақты** және **жорамал бөліктері** деп аталады және олар сәйкес *x=Rez, y=Imz* арқылы белгіленеді (*Re* – лат. realis – нақты, *Jm* – лат. imaginaries – жорамал), ал i – **жорамал бірлік сан** деп аталады. Комплекс сандардың теңдігі мен оларға жасалатын арифметикалық амалдар келесі ережелер арқылы енгізілген:

1) **а)** $z_1=x_1+iy_1$ санының нақты бөлігі мен жорамал бөлігі $z_2=x_2+iy_2$ санының сәйкес нақты бөлігі мен жорамал бөлігіне тең болса, олар өзара тең деп аталады және $z_1=z_2$ символымен белгіленеді: $(z_1=z_2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_1=x_2, \\ y_1=y_2; \end{cases}$

б) $x+0i=x, \quad 0+yi=yi, \quad 1i=i;$

2) $\left(x_1+iy_1\right)\pm\left(x_2+iy_2\right)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2);$

3) $\left(x_1+iy_1\right)\left(x_2+iy_2\right)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1);$

4) $\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad x_2^2+y_2^2\neq 0.$

Анықтама. $z=x+iy$ комплекс санының n рет көбейтіндісі, осы санның n-ші дәрежесі деп аталады және $z^n=\left(x+iy\right)^n$ символымен белгіленеді: $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\text{ рет}}=\left(x+iy\right)^n.$

Осы анықтаманы және 1-б) мен 3) шарттарды пайдалана отырып i^2 дәрежесін табайық

$$i^2 = i \cdot i = 1i \cdot 1i = \left(0+1i\right)\cdot\left(0+1i\right) = \left(0\cdot 0 - 1\cdot 1\right) + \left(0\cdot 1 + 1\cdot 0\right)i = -1+0i = -1,$$

яғни $i^2 = -1$. Сонымен, жорамал бірлік сан - квадраты минус бірге тең комплекс сан екен.

Назар аударыңыз! Нақты сан - жорамал бөлігі нөлге тең комплекс сан (**1- б)** теңдіктерінің біріншісін қараңыз), олай болса, нақты сандар жиынымен салыстырғанда комплекс сандар кең жиын. Нақты сандар жиынында дискриминанты теріс квадрат теңдеудің түбірі болмайтыны белгілі, ал комплекс сандар жиынында олай емес, мысалы $x^2+9=0$, яғни $x^2=-9$ теңдеуінің түбірлері $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$; ал $x^2+2x+5=0$ теңдеуінің түбірлері: $x_1 = -1+2i$, $x_2 = -1-2i$ (комплекс санның түбірі туралы төменде қарастырылады).

2) мен **3)** теңдіктерден, нақты сандарды қосу және көбейту амалдарының барлық қасиеттері комплекс сандарға да қатысты орындалатынын, сонымен бірге комплекс сандарға жасалатын амалдар ($i^2=-1$ теңдігін ескере отырып) алгебралық өрнектерге жасалатын амалдар сияқты орындалатынын көруге болады.

Мысалы,

$$\left(2-3i\right)\left(-5+2i\right) = 2\cdot(-5) + 2\cdot 2i + (-3)i\cdot(-5) + (-3)i\cdot 2i =$$

$$= -10+19i-6i^2 = -4+19i.$$

$\bar{z} = x - iy$ саны $z = x+iy$ санына ***түйіндес*** деп аталады.

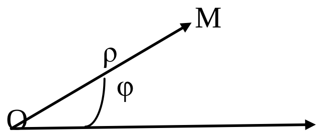
$z\cdot\bar{z} = x^2+y^2$ теңдігінің орындалатынын көру қиын емес.

Енді мына бір жәйтке назар аударыңыз! Комплекс сандарды бөлу үшін **4)** ережені қолданып жатпастан, бөлшектің алымы мен бөлімін бөлгіштің түйіндесіне көбейтсе болғаны. Мысалы,

$$\frac{2+5i}{4-3i} = \frac{(2+5i)\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)} = \frac{8-15+20i+6i}{16+9} = \frac{-7+26i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{26}{25}i.$$

Әрбір $z = x+iy$ комплекс санына OXY жазықтығының (мұны ***комплекс сандар жазықтығы*** деп те атайды) $M(x,y)$ нүктесін және керісінше, OXY жазықтығының әрбір (x,y) нүктесіне $x+iy$ комплекс санын сәйкес қоюға болады. Сондықтан $z = x + iy$ комплекс санының OXY жазықтығындағы геометриялық бейнесі – $M(x, y)$ нүктесі немесе $\overrightarrow{OM}$ радиус-векторы (56-сурет).

Алгебралық түрде жазылған комплекс сан деп, $x + iy$ өрнегін айтады. Комплекс сандарды ***тригонометриялық*** немесе ***көрсеткіштік түрде*** де жазуға болады. Ол үшін алдымен жазықтықтағы нүктенің орнын поляр координаттары деп аталатын ρ, φ сандарымен анықтауға болатынын көрсетейік. Жазықтықта ***полюс*** деп аталатын O нүктесін және осы нүктеден шығатын сәулені (оны ***поляр өсі*** деп атайды) таңдап алсақ, жазықтықтың әрбір M нүктесіне екі санды**:** OM кесіндісінің ұзындығына тең ρ санын (***полярлық радиус***) және поляр өсі мен OM сәулесінің арасындағы бұрышқа тең φ санын (***полярлық бұрыш***) сәйкес қоюға болады (төмендегі сурет).

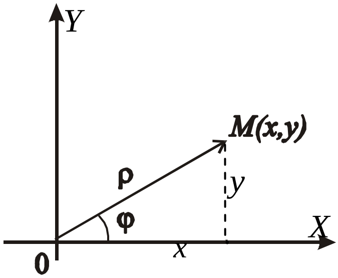


Бұл екі шама $0 \le \rho < +\infty$; $-\infty < \varphi < +\infty$ мәндеріне ие бола алады.

Егер жазықтықта тік бұрышты декарт координаттар жүйесінің бас нүктесін O полюсімен, OX өсінің оң бағытын поляр өсімен беттесетіндей етіп, ал OY өсінің оң бағытын $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ бұрышына сәйкес келетіндей етіп алсақ, онда бұл екі жүйенің координаттарының арасындағы байланыс келесі теңдіктермен өрнектеледі (59-сурет):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$



59-сурет

Ал бұл теңдіктерден келесі теңдік шығады

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

(2) теңдіктің оң жағындағы өрнек – *комплекс санның* **тригонометриялық түрі** деп аталады.

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ санын $z = x + iy$ комплекс санының ***модулі*** деп атайды және оны $|z|$ арқылы белгілейді: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

φ бұрышы (радиан өлшемінде) z комплекс санының **аргументі** деп аталады және $Argz$ арқылы белгіленеді. Оның мәндері $(-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi],\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ аралықтарында жатады, ал мұндағы $k = 0$ мәніне сәйкес алынған $(-\pi,\ \pi]$ аралығындағы аргумент $\arg z$ арқылы белгіленеді және ол аргументтің ***бас мәні*** деп аталады: $-\pi < \arg z \le \pi$.

Егер $z = 0$ болса, онда $|0| = 0$, ал $\arg 0$ өрнегінің мағынасы жоқ.

Ескерту! Аргументтің бас мәні $\arg z$ – бірмәнді функция, ал, $\varphi = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi,\ \ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ – көпмәнді функция. Олай болса, ***z-тің әрбір мәніне полярлық радиус ρ – ның жалғыз мәні мен полярлық бұрыш $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$ -тің саны ақырсыз мәндері сәйкес*** келеді.

Аргументтің бас мәнін келесі қатыстарды пайдаланып табуға болады:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x<0,\ y>0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x<0,\ y<0. \end{cases}$$

Ал $x=0,\ y>0;\ \ x=0,\ y<0$ немесе $y=0,\ x>0;\ \ y=0,\ x<0$ жағдайларында, *комплекс санның аргументін оның геометриялық бейнесі арқылы табуға болады*. Мысалы, $\arg 4i = \dfrac{\pi}{2}$, мұнда $x=0,\ y>0$; $\arg(-2)=\pi$, мұнда $y=0,\ x=-2<0$, т.с.с.

Мысал. Берілген комплекс санды тригонометриялық түрде жазу керек: $-1+\sqrt{3}\,i$.

▼ Мұнда $x=-1<0,\ \ y=\sqrt{3}>0$ болғандықтан,

$$\arg(-1+\sqrt{3}\,i)=\pi+arctg\frac{\sqrt{3}}{-1}=\pi-arctg\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3},$$

ал $\left|-1+\sqrt{3}\,i\right|=\sqrt{1+3}=2.$ Олай болса,

$$-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$ ▲

Жоғарыдағы ескертуге сәйкес, келесі анықтаманы беруге болады.

Анықтама. *Модульдері тең, ал аргументтерінің айырымы* $2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots$ *тең комплекс сандар өзара тең:*

$$z_1=z_2 \iff |z_1|=|z_2|,\quad Argz_1=Argz_2+2k\pi,\ \ k=0,\ \pm1,\ \ldots$$

$$(\ z_1=z_2 \iff \rho_1=\rho_2,\ \ \varphi_1=\varphi_2+2k\pi,\ \ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Мысалы, $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $z_2=2\left(\cos\dfrac{-17\pi}{3}+i\sin\dfrac{-17\pi}{3}\right)$

сандары тең, өйткені $|z_1|=|z_2|=2$, ал $Argz_1=\dfrac{\pi}{3}$, $Argz_2=\dfrac{-17\pi}{3}$ және

$$Argz_1-Argz_2=\frac{\pi}{3}-\frac{-17\pi}{3}=6\pi=3\cdot2\pi.$$

Анықтама бойынша,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad -\infty < \varphi < +\infty. \qquad (3)$$

Бұл 2π периодты функция: $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$ (көз жеткізіңіз) және келесі теңдіктер орындалады

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}, \qquad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}, \qquad (4)$$

(тексеріңіз), ал бұл екі теңдіктен $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$ теңдігі шығады.

Ал (3), (4) теңдіктерден ***Муавр формуласын*** алуға болады:

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (\textbf{\textit{Муавр}}\ \text{ф.})$$

***Назар аударыңыз*!** Кез келген $\varphi\in[0;2\pi)$ үшін $\left|e^{i\varphi}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$ теңдігі орындалатындықтан, φ бұрышы $[0;2\pi)$ аралығында өзгергенде $z = e^{i\varphi}$ нүктесі – радиусі 1 тең, центрі $z = 0$ нүктеде болатын шеңберді сызады..

(2), (3) теңдіктерден келесі теңдік шығады

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho \ge 0. \qquad (5)$$

Мұндағы $\rho = |z|$; ал $\varphi = Argz = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

(5) теңдіктің оң жағындағы өрнек, *комплекс санның* **көрсеткіштік түрі** деп аталады.

Сонымен, комплекс санды үш түрде жазуға болады екен:

$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$.

Мысал. Комплекс санды көрсеткіштік түрде жазу керек:

а)1+*i*; ә) *i;* б)1; в)–1.

▼ а) $\rho = |1+i| = \sqrt{2}$, $\varphi = \arg(1+i) = \mathrm{actg}\,\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$ болғандықтан,

$1 + i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$;

ә) $\rho=|i|=1,\ \ \varphi=\arg i=\dfrac{\pi}{2}$ болғандықтан, $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$;

б) $\rho=|1|=1,\ \ \varphi=\arg 1=0$, демек, $1=e^{i0}$;

в) $\rho=|-1|=1,\ \ \varphi=\arg(-1)=\pi\ \Rightarrow\ -1=e^{i\pi}$. ▲

Ескерту. *Жалпы жағдайда, кез келген комплекс айнымал* $z=x+iy$ *үшін* e^z *функциясын келесі теңдікпен анықтайды:* $e^z=e^x\cdot e^{iy},\ \ z\neq 0.$ *Бұдан* (3) *теңдікті ескеріп,*

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{6}$$

аламыз.

Сонымен бірге, кез келген z комплекс саны үшін ***Эйлер формулалары*** *деп аталатын келесі теңдіктер орындалады:*

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,\qquad e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \tag{3$'$}$$

Өз кезегінде бұл екі теңдіктен келесі формулалар шығады:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{7}$$

Кез келген $z_1=\rho_1e^{i\varphi_1}$ және $z_2=\rho_2e^{i\varphi_2}$ комплекс сандары үшін келесі теңдіктердің орындалатынын тексеру қиын емес:

$$z_1z_2=\rho_1e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2e^{i\varphi_2}=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1e^{i\varphi_1}}{\rho_2e^{i\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\qquad z_2\neq 0.$$

Бұл теңдіктерден келесі ереже шығады. ***Комплекс сандарды көбейту үшін,*** *олардың модульдерін көбейтіп, аргументтерін қосу керек;* ***комплекс сандарды бөлу үшін,*** *олардың модульдерін (бөлінгіштің модулін бөлгіштің модуліне) бөліп, аргументтерін (бөлінгіштің аргументінен бөлгіштің аргументін) шегеру керек***.**

Осы ережені пайдаланып, комплекс санның натурал дәрежесінің формуласын жаза аламыз:

$$z^n=\left(\rho e^{i\varphi}\right)^n=\rho^ne^{in\varphi}. \tag{8}$$

Мысал. $(-1+\sqrt{3}i)^{12}$ табу керек.

▼ Берілген комплекс санды көрсеткіштік түрде жазып, (8) формуланы пайдаланамыз. Бұл санның модулі мен аргументінің бас мәні: $\rho=\left|-1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{1+3}=2;\ \ \varphi=\arg(-1+\sqrt{3}i)=$

$=\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$ тең болғандықтан, $(-1+\sqrt{3}i)^{12}=$

$$=\left(2\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{12}=2^{12}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 12}=2^{12}e^{i8\pi}=$$

$$=2^{12}\cdot e^{i0}=2^{12}(\cos 0+i\sin 0)=2^{12}. \quad ▲$$

Келесі теңдіктердің орындалатынын тексеру керек:

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2};\qquad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2};\qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\quad z_2\neq 0. \qquad (9)$$

▼ Мысалы, $\overline{\rho e^{i\varphi}}=\overline{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\rho e^{-i\varphi}$ теңдігін ескерсек, $\overline{z_1z_2}=\overline{\rho_1e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2e^{i\varphi_2}}=\rho_1\rho_2\overline{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}=\ \rho_1\rho_2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}=$ $=\rho_1e^{-i\varphi_1}\rho_2e^{-i\varphi_2}=\overline{\rho_1e^{i\varphi_1}}\cdot\overline{\rho_2e^{i\varphi_2}}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ аламыз. Бөлінді үшін де дәлелдеуі осындай, ал қосындыға қатысты теңдікті комплекс санның алгебралық түрі арқылы тексеруді оқушыға ұсынамыз. ▲

Анықтама. $z=\rho e^{i\varphi}$ комплекс санының ***n*-ші дәрежелі түбірі** деп, n-ші дәрежесі z-ке тең $w=\sqrt[n]{z}$ комплекс санды айтады.

Осы $z=\rho e^{i\varphi}$ комплекс санының n-ші дәрежелі түбірін табу формуласын шығарайық. Егер $\sqrt[n]{z}=w=re^{i\theta}$ болса, онда анықтамаға сәйкес, $w^n=(re^{i\theta})^n=z=\rho e^{i\varphi}$ тең. Бұдан

$$r^ne^{i\theta n}=\rho e^{i\varphi}\ \Leftrightarrow\ r^n=\rho,\ \theta n=\varphi+2k\pi,\ k=0,\pm1,\ldots.\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\qquad r=\sqrt[n]{\rho},\qquad \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n},\ k=0,\pm1,\ldots.$$

Олай болса, $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $k=0,\pm1,\ldots$. Бұл өрнек $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ үшін әртүрлі n мәнге ие болады да, ал $k=\pm n,\ \pm(n+1),\ldots$ және $k=-1,-2,\ldots,-(n-1)$ үшін ($e^{i\varphi}$ функциясының периоды $2\pi k,\ \ k=\pm1,\pm2,\ldots$ шамасына тең болуына байланысты) бұл мәндер қайталанады. Сондықтан, $\sqrt[n]{z}$ түбірінің әртүрлі n мәнін алсақ жеткілікті

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\qquad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{10}$$

Мұндағы $\sqrt[n]{\rho}$ шамасы $\rho=|z|$ нақты санының n-ші дәрежелі арифметикалық түбірі (келесі мысалды қараңыз).

1-Мысал. $\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1\cdot e^{i0}}=\sqrt[4]{1}\cdot e^{i\frac{0+2k\pi}{4}}$, $k=0,1,2,3.$

$$k=0,\ \ w_0=e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1;$$

$$k=1,\ \ w_1=e^{i\frac{2\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i\ ;$$

$$k=2,\ \ w_2=e^{i\frac{4\pi}{4}}=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1\ ;$$

$$k=3,\ \ w_3=e^{i\frac{6\pi}{4}}=e^{i\frac{3\pi}{2}}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Назар аударыңыз! Осы мысалдағы $\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1\cdot e^{i0}}=\sqrt[4]{1}\cdot e^{i\frac{0+2k\pi}{4}}$ теңдігінің сол жағындағы $\sqrt[4]{1}$ өрнегі – төрт мәнді, ал оң жағындағы $\sqrt[4]{1}$ өрнегі – бір мәнді (арифметикалық түбір)!

2-мысал. $\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}$, $k=0,1,2.$

$$k=0,\ \ w_0=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}};$$

$$k=1,\ \ w_1=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}}=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{9\pi}{12}}=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$k=2,\ \ w_2=\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\frac{17\pi}{12}}.$$

§ 3.2. *n*-ші дәрежелі көпмүшелік

3.2.1. Коэффициенттері комплекс сандар болатын *n-ші дәрежелі көпмүшеліктер.* *n-ші дәрежелі көпмүшелік* деп,

$$Q_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_n \neq 0,$$

түріндегі функцияны айтады. Мұндағы a_k, $k = 0,1,2,...$ коэффициенттері – нақты немесе комплекс сандар; z – комплекс айнымал $(z = x + iy)$.

Егер $z_0 = x_0 + iy_0$ саны үшін $Q_n(z_0) = 0$ теңдігі орындалса, онда ол сан көпмүшеліктің **түбірі** немесе **нөлі** деп аталады.

Қандай шарттар орындалғанда $z_0 = x_0 + iy_0$ саны $Q_n(z)$ көпмүшелігінің түбірі болады? Осы сұраққа жауап іздейік.

$Q_n(z)$ көпмүшелігіндегі айнымал z – ті $z = (z - z_0) + z_0$ деп алсақ $Q_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \left[(z - z_0) + z_0\right]^k$, ал мұндағы квадрат жақшаларды дәрежелеп, содан соң $z - z_0$ айырымы бойынша ұқсас мүшелерін келтірсек

$$Q_n(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + ... + b_n(z - z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k (z - z_0)^k \qquad (*)$$

аламыз (дәрежелеу нәтижесінде алынған коэффициенттерді b_k, $k = 0,1,2,...$ арқылы белгіледік, олар тұрақты комплекс сандар). Бұл теңдіктен, $z_0 = x_0 + iy_0$ – саны $Q_n(z)$ көпмүшелігінің түбірі болуы үшін $b_0 = 0$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті екені көрініп тұр.

Сонымен, $z_0 = x_0 + iy_0$ саны $Q_n(z)$ көпмүшелігінің түбірі болуы үшін көпмүшеліктің $z - z_0$ айырымы бойынша жіктеліміндегі бос мүшенің нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

(Көпмүшелікті $x - a$ айырымы бойынша жіктеу үшін Тейлор формуласын қолдануға болады, ол математикалық анализ курсында қаралады).

Бұл тұжырым мен келесі теңдіктің орындалуы парапар екенін көреміз

$$Q_n(z)=(z-z_0)\left[b_1+b_2(z-z_0)+...+b_n(z-z_0)^{n-1}\right]=(z-z_0)R_{n-1}(z).$$

Безу теоремасы (Безу Этьен, 31.3.1730-27.9.1783, француз математигі). z_0 саны көпмүшеліктің түбірі болуы үшін, көпмүшеліктің $z-z_0$ айырымына бөлінуі **қажетті және жеткілікті:**

$$Q_n(z)=(z-z_0)R_{n-1}(z). \tag{1}$$

Егер (1) теңдікте $R_{n-1}(z_0)\neq 0$ орындалса, онда z_0 саны Q_n көпмүшелігінің **жай түбірі (нөлі)** деп аталады. Ал егер $R_{n-1}(z_0)=0$ болса, онда (1) теңдік $Q_n(z)=(z-z_0)^2\ P_{n-2}(z)$ түріне келеді. Егер мұнда $P_{n-2}(z_0)\neq 0$ болса, онда z_0 саны Q_n көпмүшелігінің **екі еселі түбірі (нөлі)** деп аталады. Жалпы жағдайда, егер келесі шарт орындалса: $Q_n(z)=(z-z_0)^k\ M_{n-k}(z),\quad M_{n-k}(z_0)\neq 0,$ онда z_0 саны Q_n **көпмүшелігінің *k* еселі түбірі (нөлі)** деп аталады. Осы айтылғандардан және Безу теоремасынан мынадай тұжырым аламыз: z_0 саны $Q_n(z)$ *көпмүшелігінің **k еселі түбірі (нөлі)*** болуы үшін келесі шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті

$$Q_n(z)=(z-z_0)^k\ M_{n-k}(z),\quad M_{n-k}(z_0)\neq 0. \tag{**}$$

Негізгі теорема. n-ші дәрежелі көпмүшеліктің ең болмағанда бір түбірі болады.

Бұл теоремадан келесі маңызды салдар шығады.

Салдар. n-ші дәрежелі Q_n көпмүшелігінің, еселіктерімен қоса есептегенде, n түбірі болады. Басқаша айтқанда, бас мүшесі $a_n\neq 0$ болатын n-ші дәрежелі көпмүшелікті

$$Q_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}\cdot(z-z_2)^{k_2}...(z-z_j)^{k_j},\quad k_1+k_2+...+k_j=n, \tag{2}$$

түрінде жазуға болады. Мұндағы $z_1,z_2,...z_j$ – еселіктері сәйкес $k_1,\ k_2,\ ...,\ k_j$ болатын, өзара тең емес түбірлер.

3.2.2. *n*-ші дәрежелі нақты көпмүшеліктер

Егер

$$Q_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k, \quad a_n\neq 0, \tag{3}$$

көпмүшелігінің a_k коэффициенттері нақты сандар болса, онда оны ***n*-ші дәрежелі нақты көпмүшелік** деп атайды. Өйткені бұл жағдайда, егер (3) теңдіктегі $z=x$ – нақты мәнді айнымал болса, онда көпмүшелікте нақты мәндерді қабылдайды (комплекс айнымал z үшін көпмүшелік комплекс мәндер қабылдайды).

Теорема. Егер $z_0=\alpha+i\beta$ комплекс саны Q_n нақты көпмүшеліктің түбірі болса, онда оған түйіндес $\bar{z}_0=\alpha-i\beta$ комплекс саны да осы көпмүшеліктің түбірі болады.

▼ Теорема шартын және § 3.1. (9)–теңдіктерді, сонымен бірге a нақты саны үшін $\bar{a}=a$ болатынын пайдаланамыз

$$Q_n(\bar{z}_0)=\sum_{k=0}^{n}a_k(\bar{z}_0)^k=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot\overline{z_0^k}=\left|a_k=\bar{a}_k\right|=\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\cdot\overline{z_0^k}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k\cdot z_0^k}=$$

$$=\overline{\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot z_0^k}=\overline{Q_n(z_0)}=\bar{0}=0. \quad ▲$$

Мысал. $z^3-4z^2+9z-10=0$ теңдеуінің түбірлерін табайық.

$z^3-4z^2+9z-10=(z-2)(z^2-2z+5)=0$, бұдан $z_1=2$, $z_2=1+2i$, $z_3=1-2i$ аламыз.

Егер $z_0=\alpha+i\beta$ саны Q_n нақты көпмүшеліктің түбірі болса, онда теорема бойынша, оған түйіндес $\overline{z_0}=\alpha-i\beta$ саны да Q_n нақты көпмүшелігінің түбірі болатындықтан

$$Q_n(z)=\left[(z-(\alpha+i\beta\right]\left[z-(\alpha-i\beta)\right]\cdot R_{n-2}(z)=(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2)\cdot R_{n-2}(z),$$

мұнда $p=-2\alpha$, $q=\alpha^2+\beta^2$ деп алып, келесі теңдікті жазуға болады

$$Q_n(z)=(z^2+pz+q)\,R_{n-2}(z),\quad D=\frac{p^2}{4}-q<0. \tag{4}$$

Ал егер $z_0 = \alpha + i\beta$ саны Q_n нақты көпмүшеліктің s еселі түбірі болса, онда оған түйіндес $\overline{z_0} = \alpha - i\beta$ саны да Q_n нақты көпмүшелігінің s еселі түбірі болатындықтан

$$Q_n(z) = \left[(z - (\alpha + i\beta)\right]^s \left[z - (\alpha - i\beta)\right]^s \cdot R_{n-2s}(z).$$

Мұнда да алдындағыдай түрлендірулер мен белгілеулерді жасай отырып келесі теңдікті жазуға болады

$$Q_n(z) = (z^2 + pz + q)^s \cdot R_{n-2s}(z),\ D = \frac{p^2}{4} - q < 0. \qquad (5)$$

Егер $c_1,...,c_r$ сандары Q_n көпмүшелігінің сәйкес $l_1,...,l_r$ еселі *нақты* түбірлері, ал $\alpha_1 + i\beta_1,...,\alpha_j + i\beta_j$ сандары оның сәйкес $k_1,..., k_j$ еселі *комплекс* түбірлері болса, онда бас коэффициенті a_n тең ($a_n \neq 0$) n-ші дәрежелі Q_n нақты көпмүшелігін сызықтық және квадрат көбейткіштеріне келесі түрде жіктеуге болады:

$$Q_n(z) = a_n(z - c_1)^{l_1}...(z - c_r)^{l_r} \cdot (z^2 + p_1 z + q_1)^{k_1}...(z^2 + p_j z + q_j)^{k_j}, \qquad (6)$$

$$l_1 + ... + l_r + 2(k_1 + ... + k_j) = n.$$

Мұндағы квадрат көбейткіштердің әрбіреуі үшін

$$z^2 + p_s z + q_s = [(z - (\alpha_s + i\beta_s)] \cdot \left[z - (\alpha_s - i\beta_s)\right]$$

орындалады ($D = p_s^2 - 4q_s < 0$).

3.2.3. Рационал функция және оны ең қарапайым бөлшектер қосындысына жіктеу.

Екі алгебралық көпмүшеліктердің қатынасы

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \qquad (1)$$

$$P_m(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m,\ \ b_m \neq 0,\ \ m \geq 0,$$

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,\ \ a_n \neq 0,\ \ n \geq 1$$

– **рационал функция** немесе **рационал бөлшек** деп аталады.

P_m және Q_n – нақты көпмүшеліктер, x – нақты айнымал деп аламыз. Келесі түрдегі бөлшектер:

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad k \in N, \tag{2}$$

ең қарапайым бөлшектер деп аталады (мұндағы, a, p, q, A, B – нақты сандар; $D = p^2 - 4q < 0$).

Егер $m \geq n$ болса, онда (1) – бұрыс бөлшек деп аталады. Бұл жағдайда бұрыштап бөлу арқылы $f(x)$ функциясын оның бүтін бөлігі мен **дұрыс бөлшек** деп аталатын $\frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)}$, $m_1 < n$ түріндегі бөлшектің қосындысы түрінде жаза аламыз: $f(x)=$ көпмүшелік $+\ \frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)}$, $m_1 < n$.

Енді (1) бөлшекті дұрыс $(m < n)$ деп алып, оны **ең қарапайым (8) бөлшектердің қосындысына жіктеу** мәселесін қарас-тырайық.

Теорема. $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m<n$, бөлшегінің бөлімі келесі түрде жіктелсін ((6) теңдікті қараңыз):

$$Q_n(x) = a_n(x-a)^k \cdot ... \cdot (x^2+px+q)^l, \quad p^2 - 4q < 0. \tag{3}$$

Онда ол бөлшекті жалғыз түрде келесі қосындыға жіктеуге болады:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ ...$$

$$... + \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + ... + \frac{B_lx+C_l}{\left(x^2+px+q\right)^l}. \tag{4}$$

Мұндағы A_i, B_i, C_i – тұрақты сандар.

Бұл теореманы *келесі* мысалдармен түсіндірейік.

Мысал. Келесі дұрыс бөлшектерді ең қарапайым бөлшектер қосындысына жіктеу керек: **а)** $\frac{x-3}{x^3-x}$; **ә)** $\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}$.

▼ **а)** бөлшектің бөлімін (3) түрде жазамыз: $x^3-x=x(x^2-1)=$ $=x(x-1)(x+1)$ және ол бөлшекті (4) түрдегі бөлшекке жіктейміз: $\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$. Мұндағы A,B,C коэффициенттерін табу үшін, бұл теңдіктің оң жағын бір бөлшекке келтіреміз: $\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$. Бұл теңдіктен:

$$x-3=A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1), \tag{5}$$

немесе: $0\cdot x^2+x-3=(A+B+C)x^2+(B-C)x-A$ аламыз. Бұдан үш белгісі бар үш теңдеу жүйесін $\begin{cases} A+B+C=0, \\ B-C=1, \\ -A=-3 \end{cases}$ аламыз да, оны шешіп A,B,C сандарын табамыз: $A=-3$, $B=-1$, $C=-2$. Бұл әдіс, ***анықталмаған коэффициенттер әдісі*** деп аталады.

Немесе A,B,C сандарын табу үшін былай етуге болады. (5) теңдік x-тің кез келген мәнінде дұрыс болатындықтан x-ке «ыңғайлы» мәндер береміз. Мысалы, A-ны табу үшін x-ке екінші және үшінші қосылғыштар нөлге тең болатындай мән: $x=0$ береміз. Онда, $-3=A\cdot(-1)$, $A=3$. Осы сияқты B мен C сандарын да табуға болады: $x=1$, $-2=2B$, $B=-1$; $x=-1$, $-4=2C$, $C=-2$.

Бұл әдісті ***дербес мәндер әдісі*** деп те атайды.

Сонымен, $\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}$.

ә) Мұнда бөлшектің бөлімі (3) түрдегі көбейткіштерге жікте-ліп тұр. Бөлшекті (4) түрде жазайық

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Теңдіктің оң жағын бір бөлшекке келтіреміз, содан соң теңдіктің екі жағындағы бөлшектердің алымдарын теңестіреміз:

$$x^2+x-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)\cdot x.$$

Мұнда $x=0$ деп алып A-ны табамыз: $x=0$, $-1=A$.

Қалған белгісіздерді табу үшін, теңдіктің оң және сол жақ бөліктеріндегі x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз: $A+B=0,\quad C=0,\quad 2A+B+D=1,\quad C+E=1,\quad A=-1.$ Бұдан $A=-1,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=2,\quad E=1$ табылады. Олай болса,

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}.$$ ▲

Тақырыпқа арналған сұрақтар мен тапсырмалар

1. Комплекс сандарға қолданылатын қандай арифметикалық амалдарды білесіз? $i^2=-1$ теңдігін дәлелдеңіз.
2. Комплекс санның аргументі және модулі деген не? Модуль мен аргументтің бас мәнін қалай табады?
3. Комплекс сандардың теңдігінің анықтамасын келтіріңіз. $e^{i\varphi}$ функциясының қандай қасиеттері бар?
4. Комплекс санның тригонометриялық, көрсеткіштік түрлерін жазыңыз және оларды қалай алуға болатынын көрсетіңіз. Мысал келтіріңіз.
5. Эйлер формулаларын жазыңыз және олар арқылы $\cos z$, $\sin z$ функцияларын анықтаңыздар.
6. Муавр формуласын жазыңыз және оны қалай алуға болатынын көрсетіңіз. Комплекс сандарды көбейткенде, бөлгенде олардың аргументтері мен модульдері үшін қандай амал орындалады?

7. Комплекс санның n-ші дәрежелі түбірінің формуласын қорытып шығарыңыз. Мысал келтіріңіз.

8. Коэффициенттері комплекс сандар болатын n-ші дәрежелі көпмүшеліктің түрін жазыңыз. Безу теоремасын дәлелдеңіз.

9. Көпмүшеліктің еселі түбірінің анықтамасын келтіріңіз. Көпмүшеліктің түбірі туралы негізгі теореманы және оның салдарын тұжырымдаңыз.

10. Коэффициенттері нақты n-ші дәрежелі көпмүшеліктің комплекс түбірі туралы теореманы дәлелдеңіз.

11. Рационал бөлшек деп нені айтады? Дұрыс бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеу әдістерін түсіндіріңіз. Мысалдар келтіріңіз.

3.1–ҮТ

1-есеп. Амалдарды орындау керек:

1.1. а) $\dfrac{-2+5i}{4+3i}$; ә) $\sqrt[4]{-1}$.

1.2. а) $\dfrac{-4+i}{4+i}$; ә) $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

1.3. а) $\dfrac{2+8i}{2-i}$; ә) $\sqrt[3]{1}$.

1.4. а) $\dfrac{2-5i}{4-3i}$; ә) $\sqrt[3]{i}$.

1.5. а) $\dfrac{-9+2i}{1+3i}$; ә) $\sqrt[4]{1+i}$.

1.6. а) $\dfrac{7+2i}{i}$; ә) $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.

1.7. а) $\dfrac{9+7i}{4-i}$; ә) $\sqrt[3]{-1}$.

1.8. а) $\dfrac{-2-5i}{1+4i}$; ә) $\sqrt[3]{-i}$.

1.9. а) $\dfrac{2+i}{4-6i}$; ә) $\sqrt[4]{-16}$.

1.10. а) $\dfrac{6-5i}{-1+i}$; ә) $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

1.11. а) $\dfrac{i}{5+3i}$; ә) $\sqrt[3]{8}$.

1.12 а) $\dfrac{-2}{4+i}$; ә) $\sqrt[3]{8i}$.

1.13. а) $\dfrac{1+2i}{5+i}$; ә) $\sqrt[4]{16}$.

1.14. а) $\dfrac{-2+5i}{i}$; ә) $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$

1.15. а) $\dfrac{5i}{4-3i}$; ә) $\sqrt[3]{-8}$

1.16. а) $\dfrac{-9+i}{2+3i}$; ә) $\sqrt[3]{-8i}$.

1.17. а) $\dfrac{-2-i}{-3i}$; ә) $\sqrt[4]{-\dfrac{1}{16}}$.

1.18. а) $\dfrac{-2+i}{1+i}$; ә) $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.19. а) $\dfrac{-2+5i}{-4+5i}$; ә) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}i}$.

1.20. а) $\dfrac{-i}{4+8i}$; ә) $\sqrt[3]{27i}$.

1.21. а) $\dfrac{-1+5i}{1+7i}$; ә) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$.

1.22. а) $\dfrac{-1+3i}{1+3i}$; ә) $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.23. а) $\dfrac{-2i}{2+3i}$; ә) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$.

1.24. а) $\dfrac{-2+i}{1+2i}$; ә) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}$.

1.25. а) $\dfrac{-7+i}{1-3i}$; ә) $\sqrt[4]{-128+128\sqrt{3}\cdot i}$. **1.26.** а) $\dfrac{-2-i}{4-i}$; ә) $\sqrt[3]{27}$.

1.27. а) $\dfrac{-1-i}{-1+i}$; ә) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{256}}$. **1.28.** а) $\dfrac{2-25i}{i}$; ә) $\sqrt[4]{-128-128\sqrt{3}\cdot i}$.

1.29. а) $\dfrac{-4+3i}{4+3i}$; ә) $\sqrt[3]{\dfrac{i}{27}}$. **1.30.** а) $\dfrac{-2+9i}{1+3i}$; ә) $\sqrt[4]{256}$.

2-есеп. Теңсіздікпен берілген аймақты салу керек:

2.1. $|z-1|\le 1$, $|z+1|>2$. **2.2.** $|z+i|\ge 1$, $|z|<2$.
2.3. $|z-i|\le 2$, $\mathrm{Re}z>1$. **2.4.** $|z+1|\ge 1$, $|z+i|<1$.
2.5. $|z+1|<1$, $|z-i|\le 1$. **2.6.** $|z+i|\le 2$, $|z-i|>2$.
2.7. $|z-1-i|\le 1$, $\mathrm{Im}\, z>1$, $\mathrm{Re}z\ge 1$. **2.8.** $|z-1+i|\ge 1$, $\mathrm{Re}\, z<1$, $\mathrm{Im}\, z\le -1$.
2.9. $|z-2-i|\le 2$, $\mathrm{Re}\, z\ge 3$, $\mathrm{Im}\, z<1$.
2.10. $|z-1-i|\ge 1$, $0\le \mathrm{Re}z<2$, $0<\mathrm{Im}z\le 2$.
2.11. $|z+i|<2, \quad 0<\mathrm{Re}\, z\le 1.$
2.12. $|z-i|\le 1, \quad 0<\arg z<\pi/4.$
2.13. $|z-i|\le 2, \quad 0<\mathrm{Im}\, z<2.$
2.14. $|z+i|>1, \quad -\pi/4\le \arg z<0.$
2.15. $|z-1-i|<1,\ |\arg z|\le \pi/4.$
2.16. $|z|<2, \quad -\pi/4\le \arg(z-1)\le \pi/4.$
2.17. $|z|\le 1, \ \arg(z+i)>\pi/4.$
2.18. $1<|z-i|\le 2, \quad \mathrm{Im}\, z\ge 0,\ \mathrm{Re}\, z<1.$
2.19. $1\le |z-i|<2, \ \mathrm{Re}\, z\le 0,\ \mathrm{Im}\, z>1.$
2.20. $|z|<2, \quad \mathrm{Re}\, z\ge 1,\ \arg z<\pi/4.$
2.21. $|z|>1, \quad -1<\mathrm{Im}\, z\le 1,\ 0<\mathrm{Re}\, z\le 2.$
2.22. $|z-1|>1, \quad -1\le \mathrm{Im}\, z<0,\ 0\le \mathrm{Re}\, z<3.$
2.23. $|z+i|<1, \quad -3\pi/4\le \arg z\le -\pi/4.$

2.24. $|z-i|\le 1, \quad -\pi/2<\arg(z-i)<\pi/4.$

2.25. $z\bar{z}<2, \quad \operatorname{Re}z\le 1,\ \operatorname{Im}z>-1.$

2.26. $z\bar{z}\le 2, \quad \operatorname{Re}z<1,\ \operatorname{Im}z>-1.$

2.27. $1<z\bar{z}<2, \quad \operatorname{Re}z>0,\ 0\le \operatorname{Im}z\le 1.$

2.28. $|z-1|<1, \quad \arg z\le \pi/4,\ \arg(z-1)>\pi/4.$

2.29. $|z-i|<1, \quad \arg z\ge \pi/4,\ \arg(z+1-i)\le \pi/4.$

2.30. $|z-2-i|\ge 1, \quad 1\le \operatorname{Re}z<3,\ 0<\operatorname{Im}z\le 3.$

3.1-ҮТ орындау үлгісі

1-есеп. Амалдарды орындау керек: а) $\dfrac{7-i}{5+2i}$; ә) $\sqrt[3]{-27i}$.

Шешуі. **а)** Бөлшектің алымы мен бөлімін $5+2i$ санының түйіндесіне көбейтеміз де, нәтижені алгебралық түрде жазамыз

а) $\dfrac{7-i}{5+2i}=\dfrac{(7-i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)}=\dfrac{35-14i-5i+2i^2}{25-4i^2}=\dfrac{33-19i}{29}=\dfrac{33}{29}-\dfrac{19}{29}i;$

ә) $z=-27i$ комплекс санының модулі $|z|=27$, аргументінің бас мәні $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$. Бұл мәндерді және $n=3$ санын

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), \quad k=0,1,\cdots,n-1$$

формуласына қойсақ

$$\sqrt[3]{-27i}=\sqrt[3]{27}(\cos\frac{-\pi/2+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\pi/2+2\pi k}{3}), \quad k=0,1,2$$

аламыз. Бұдан:

$$k=0 \text{ үшін, } \omega_0=3(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))=3(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2},$$

$$k=1 \text{ үшін, } \omega_1=3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=3(0+i)=3i,$$

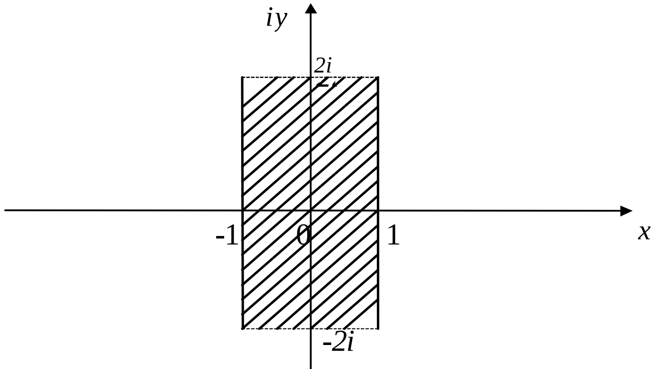
$k=2$ үшін, $\omega_2 = 3(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$ аламыз.

Жауабы: $\sqrt[3]{-27i} = \{\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2};\ 3i;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}\}$.

2-есеп. Теңсіздіктермен берілген аймақты салу керек:

а) $|\operatorname{Re} z| \le 1,\ |\operatorname{Im} z| < 2$; **ә)** $|z-(1+i)| \le 1,\quad \frac{\pi}{4} \le \arg(z-i) < \frac{\pi}{2}.$

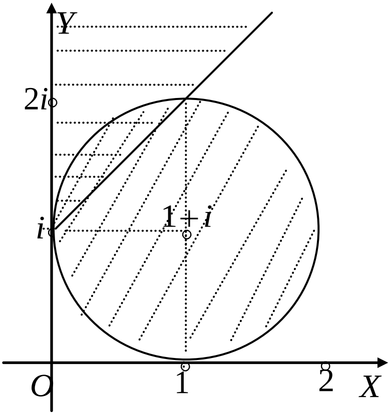
Шешуі. а) $\operatorname{Re} z = x,\quad \operatorname{Im} z = y$ екенін ескерсек, онда берілген теңсіздіктер келесі түрде жазылады: $-1 \le x \le 1,\quad -2 < y < 2.$



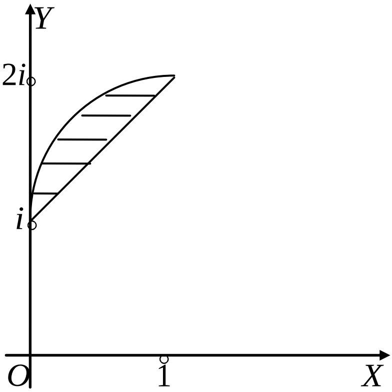
$60-сурет$

Бұл теңсіздіктер комплекс жазықтықта тік төртбұрышты анықтайды (60-сурет). Мұнда аймаққа жататын шекара сызықтары тұтас, ал жатпайтын шекара сызықтары пунктир сызықтармен көрсетілеген.

ә) Бірінші теңсіздіктің геометриялық мағынасы бойынша, z және $1+i$ векторларының айырымының, яғни, басы $1+i$, ал ұшы z нүктелері болатын вектордың модулі 1-ден үлкен емес, басқаша айтқанда, жазықтықтағы $1+i$ нүктесінен қашықтығы 1-ден үлкен емес z нүктелердің жиыны. Мұндай жиын, центрі $1+i$, ал радиусі 1-ге тең дөңгелектіқұрайды. Екінші қос теңсіздіктің геометриялық бейнесі бойынша, басы i нүктесі, ұшы z нүктесі болатын вектор мен OX өсінің оң бағыты арасындағы бұрыш $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ аралығындағы мәндерге ие болатын нүктелер жиыны (61-сурет). Ал осы екі шартты да қанағаттандыратын нүктелер жиыны – жоғарыда аталған екі жиынның қиылысқан (ортақ) бөлігі, яғни сегмент (62-сурет).



$61-сурет$



$62-сурет$

3.2-ҮТ

1. Келесі дұрыс бөлшектерді ең қарапайым бөлшектер қосындысына жіктеу керек:

1.1. $\dfrac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}$. **1.2.** $\dfrac{12}{(x-2)(x^2-2x-3)}$.

1.3. $\dfrac{43x+67}{(x-1)(x^2-x-12)}$. **1.4.** $\dfrac{9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}$.

1.5. $\dfrac{8x}{(x^2+6x+5)(x+3)}$. **1.6.** $\dfrac{7x^2-8x}{(x^2-5x+6)(x+1)}$.

1.7. $\dfrac{45x-61}{(x-1)\left(x^2+5x+6\right)}$.

1.8. $\dfrac{32x^2-7x}{\left(x^2+4x+3\right)(x+5)}$.

1.9. $\dfrac{6x^2+6x-6}{(x+1)\left(x^2+x-2\right)}$.

1.10. $\dfrac{37x-85}{\left(x^2+2x-3\right)(x-4)}$.

1.11. $\dfrac{3x^2+3x-24}{\left(x^2-x-2\right)(x-3)}$.

1.12. $\dfrac{3x+30}{(x-2)\left(x^2-2x-3\right)}$.

1.13. $\dfrac{3x^2-15}{(x-1)\left(x^2+5x+6\right)}$.

1.14. $\dfrac{x^2-19x+6}{(x-1)\left(x^2+5x+6\right)}$.

1.15. $\dfrac{6x}{x^3+2x^2-x-2}$.

1.16. $\dfrac{4x^2+32x+52}{\left(x^2+6x+5\right)(x+3)}$.

1.17. $\dfrac{2x^2+41x-91}{\left(x^2+2x-3\right)(x-4)}$.

1.18. $\dfrac{-17x-5}{\left(x^2+2x-3\right)(x+2)}$.

1.19. $\dfrac{40x^2+37x+36}{(x+1)\left(x^2+8x+15\right)}$.

1.20. $\dfrac{6x^2}{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}$

1.21. $\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)(x+2)}$.

1.22. $\dfrac{2x^2-26}{\left(x^2+4x+3\right)(x+5)}$.

1.23. $\dfrac{2x^2+12x-6}{(x+1)\left(x^2+8x+15\right)}$.

1.24. $\dfrac{-15x^2+40x-70}{\left(x^2+2x-3\right)(x-4)}$.

1.25. $\dfrac{2x^2+13}{\left(x^2-5x+6\right)(x+1)}$.

1.26. $\dfrac{3x+24}{\left(x^2+x-2\right)(x+1)}$.

1.27. $\dfrac{-21x^2-26}{\left(x^2-5x+4\right)(x+3)}$.

1.28. $\dfrac{7x^2-17x}{(x-2)\left(x^2-2x-3\right)}$.

1.29. $\dfrac{-30x^2+30}{\left(x^2-1\right)(x+2)}$.

1.30. $\dfrac{3x^2-17x+2}{(x-1)\left(x^2+5x+6\right)}$.

2

Бұрыс бөлшекті көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысына келтіріңіз және алынған дұрыс бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеңіз

2.1. $\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$. **2.2.** $\dfrac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}$. **2.3.** $\dfrac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}$.

2.4. $\dfrac{x+2}{x^3-x^2}$. **2.5.** $\dfrac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}$. **2.6.** $\dfrac{x+2}{x^3+x^2}$.

2.7. $\dfrac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}$. **2.8.** $\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2-x^3}$. **2.9.** $\dfrac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}$.

2.10. $\dfrac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2}$. **2.11.** $\dfrac{2x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x(x-1)^2}$.

2.12. $\dfrac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}$. **2.13.** $\dfrac{2x^3+1}{x^2(x+1)}$. **2.14.** $\dfrac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}$.

2.15. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}$. **2.16.** $\dfrac{x+2}{x^3-2x^2+x}$. **2.17.** $\dfrac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}$.

2.18. $\dfrac{4x}{(x^2-1)(x+1)}$. **2.19.** $\dfrac{1}{x^3+x^2}$. **2.20.** $\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}$.

2.21. $\dfrac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}$. **2.22.** $\dfrac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}$.

2.23. $\dfrac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}$. **2.24.** $\dfrac{3x^2+2}{x(x+1)^2}$. **2.25.** $\dfrac{x+5}{x^3-x^2-x+1}$.

2.26. $\dfrac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}$. **2.27.** $\dfrac{x^2+x+2}{x^3+x^2}$. **2.28.** $\dfrac{1}{x^3-x^2}$.

2.29. $\dfrac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}$. **2.30.** $\dfrac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}$.

3

Келесі дұрыс бөлшектерді ең қарапайым бөлшектер қосындысына жіктеу керек

3.1. $\dfrac{3x+13}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}$. **3.2.** $\dfrac{x^2-6x+8}{x^3+8}$.

3.3. $\dfrac{12-6x}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}$. **3.4.** $\dfrac{2x^2+2x+20}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}$.

3.5. $\dfrac{x^2+3x-6}{(x+1)\left(x^2+6x+13\right)}$. **3.6.** $\dfrac{x^2+3x+2}{x^3-1}$.

3.7. $\dfrac{36}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}$. **3.8.** $\dfrac{9x-9}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}$.

3.9. $\dfrac{7x-10}{x^3+8}$. **3.10.** $\dfrac{4x^2+3x+17}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}$.

3.11. $\dfrac{4x+2}{x^4+4x^2}$. **3.12.** $\dfrac{x^2-5x+40}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}$.

3.13. $\dfrac{4x-x^2-12}{x^3+8}$. **3.14.** $\dfrac{x^2-13x+40}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}$.

3.15. $\dfrac{3-9x}{x^3-1}$. **3.16.** $\dfrac{6-9x}{x^3+8}$.

3.17. $\dfrac{4x-10}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}$. **3.18.** $\dfrac{x^2+23}{(x+1)\left(x^2+6x+13\right)}$.

3.19. $\dfrac{2x^2+7x+7}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}$. **3.20.** $\dfrac{19x-x^2-34}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}$

3.21. $\dfrac{4x^2+38}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}$. **3.22.** $\dfrac{8}{(x+1)\left(x^2+6x+13\right)}$.

3.23. $\dfrac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}$.

3.24. $\dfrac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)}$.

3.25. $\dfrac{4x^2+x+10}{x^3+8}$.

3.26. $\dfrac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}$.

3.27. $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-1}$.

3.28. $\dfrac{6x}{x^3-1}$.

3.29. $\dfrac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}$.

3.30. $\dfrac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}$.

3.2–ҮТ орындау үлгісі

1. Келесі дұрыс бөлшекті ең қарапайым бөлшектер қосындысына жіктеу керек: $\dfrac{7x+2}{(x-1)(x^2-5x+6)}$.

▼ Бөлшектің бөлімін (10) түрде жазамыз: $(x-1)(x^2-5x+6)=$ $=(x-1)(x-2)(x-3)$ және бөлшекті (11) түрдегі бөлшекке жіктейміз: $\dfrac{7x+2}{(x-1)(x^2-5x+6)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$. Бұл теңдіктің оң жағын бір бөлшекке келтіреміз, содан соң шыққан бөлшектердің алымдарын теңестіреміз:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)=7x+1.$$

Мұндағы A,B,C белгісіздерді ***дербес мәндер әдісімен*** табуға болады: $x=1$ болса $2A=8$, $A=4$; $x=2$ болса $-B=15$, $B=-15$; $x=3$ болса $2C=22$, $C=11$.

Жауабы: $\dfrac{7x+1}{(x-1)\left(x^2-5x+6\right)}=\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{15}{x-2}+\dfrac{11}{x-3}.$ ▲

2. Бұрыс бөлшекті көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысына келтіріңіз және алынған дұрыс бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеңіз: $\dfrac{x^4-5x-1}{x^3-x^2}$.

▼ Бұрыштап бөлу амалын орындайық:

$$\begin{array}{l|l} x^4-5x-1 & x^3-x^2 \\ \cline{2-2} x^4-x^3 & x+1 \\ \hline x^3-5x-1 & \\ x^3-x^2 & \\ \hline x^2-5x-1 & \end{array}$$

Сонымен, $\dfrac{x^4-5x-1}{x^3-x^2}=x+1+\dfrac{x^2-5x-1}{x^3-x^2}$ алдық. Мұндағы дұрыс бөлшекті ең қарапайым бөлшектер қосындысына жіктейік:

$$\frac{x^2-5x-1}{x^3-x^2}=\frac{x^2-5x-1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}.$$

Бұдан $x^2-5x-1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$ аламыз. Белгісіз коэффициенттерді табуға алдымен ***дербес мәндер әдісін*** қолданамыз: $x=0$ болса, $-B=-1,\ B=1;$ $x=1$ болса, $C=-5.$

Белгісіз A-ны табуға ***анықталмаған коэффициенттер әдісін*** қолданамыз: $\begin{cases} A+C=1, \\ C=-5, \end{cases}$ $A=6.$

Жауабы: $\dfrac{x^4-5x-1}{x^3-x^2}=x+1+\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{x-1}.$ ▲

3. Берілген дұрыс бөлшекті ең қарапайым бөлшектер қосындысына жіктеу керек: $\dfrac{x+9}{(x-1)\left(x^2-4x+13\right)}$.

▼ Бөліміндегі квадрат үшмүшеліктің дискриминанты теріс болғандықтан, берілген бөлшек екі ең қарапайым бөлшектертің қосындысына жіктеледі: $\dfrac{x+9}{(x-1)\left(x^2-4x+13\right)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-4x+13}=$

$=\dfrac{A\left(x^2-4x+13\right)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)\left(x^2-4x+13\right)}$. Бұдан

$A\left(x^2-4x+13\right)+(Bx+C)(x-1)=x+9$ аламыз. Мұндағы A,B,C коэффициенттерін табамыз: $x=1$ болса, $10A=10,\ \ A=1;$

Ал B мен C коэффициенттерін ***анықталмаған коэффициенттер әдісімен*** іздейміз: $\begin{cases} A+B=0, \\ 13A-C=2, \quad C=11; \ \ B=-1; \\ A=1, \end{cases}$

Жауабы: $\dfrac{x+9}{(x-1)\left(x^2-4x+13\right)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-x+11}{x^2-4x+13}$.

Бақылау жұмысына арналған есептер

Сызықтық алгебра элементтері

I. Берілген A мен B матрицалары бойынша $(2A^T - 3B)\cdot(A+2B^T)$ матрицасын табу керек.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

12. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ -3 & 0 & 1\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}$.

13. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

14. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

15. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

16. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

17. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$.

18. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

19. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix}$.

20. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

21. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

22. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

23. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

24. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

25. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

26. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

27. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

28. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

29. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

30. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$..

II. Үш белгісізі бар үш сызықтық теңдеу жүйесі берілген.

1) Крамер формуласы бойынша оның шешімін табу керек; 2) жүйені матрицалық есептеулер арқылы шешу керек; 3) жүйені Гаусс әдісімен шешу керек.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 8, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 8x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -1, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -10, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 13. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -10, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 8, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

Векторлық алгебра элементтеріне арналған есептер

1. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бойынша жіктелген $\vec{c}_1$ мен $\vec{c}_2$ векторлары коллинеар ма?

2. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары ортогонал ма?

3. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары компланар ма?

4. α -ның қандай мәнінде $\vec{AB}$ мен $\vec{AC}$ векторлары ортогонал болады?

5. $A, B, C.$ нүктелерінің координаттары берілген. Есептеу керек:

1) пр$_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}(2\vec{AC}+3\vec{CB})$;

2) $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|$;

3) $\angle\left((\vec{AB}-\vec{CB}), \vec{AB}\right)$;

4) $\vec{AB}$ векторының ортын;

5) $\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)$;

6) $\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]$;

7) $\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}$;

6. $ABCD$ пирамидасының төбелерінің координаттары берілген.

1) пирамида көлемін;
2) AB қабырғасының ұзындығын;
3) ABC жағының ауданын

есептеу керек:

1

1.1 $\vec{a}=\{1;+2;3\}$, $\vec{b}=\{-3;0;-1\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+\vec{b}.$

2.1 $\vec{a}=\{1;3;-1\}$, $\vec{b}=\{3;-2;3\}.$

3.1 $\vec{a}=\{-2;3;+1\}$, $\vec{b}=\{1;+1;-3\}$, $\vec{c}=\{1;-9;1\}.$

4.1 $A(\alpha;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(3;-4;5)$.

5.1 $A(-1;2;1)$, $B(-1;3;-4)$, $C(0;1;-2)$.

6.1 $A(1;-1;1)$, $B(-1;2;-4)$, $C(2;0;-6)$, $D(-2;5;1)$.

2

1.2 $\vec{a}=\{1;0;1\}$, $\vec{b}=\{-2;3;5\}$, $\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$.

2.2 $\vec{a}=\{2;1;4\}$, $\vec{b}=\{4;1;3\}$.

3.2 $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;1\}$, $\vec{c}=\{3;-1;-2\}$.

4.2 $A(0;-3;\alpha)$, $B(-12;-3;-3)$, $C(-9;-3;-6)$.

5.2 $A(0;1;2)$, $B(3;-1;2)$, $C(-1;2;5)$.

6.2 $A(0;5;0)$, $B(2;3;-4)$, $C(0;0;6)$, $D(-3;1;-1)$.

3

1.3 $\vec{a}=\{-2;-4;1\}$, $\vec{b}=\{1;2;-7\}$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}+\vec{b}$.

2.3 $\vec{a}=\{0;1;2\}$, $\vec{b}=\{1;3;-2\}$.

3.3 $\vec{a}=\{2;-1;2\}$, $\vec{b}=\{1;2;-3\}$, $\vec{c}=\{3;-4;7\}$.

4.3 $A(3;\alpha;-1)$, $B(5;5;-2)$, $C(4;1;1)$.

5.3 $A(0;2;3)$, $B(3;1;2)$, $C(1;5;1)$.

6.3 $A(0;0;6)$, $B(4;0;-4)$, $C(1;3;-1)$, $D(4;-1;-3)$.

4

1.4 $\vec{a}=\{1;2;-3\}$, $\vec{b}=\{2;-1;-1\}$, $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}$.

2.4 $\vec{a}=\{1;2;1\}$, $\vec{b}=\{3;1;2\}$.

3.4 $\vec{a}=\{1;2;4\}$, $\vec{b}=\{2;1;-5\}$, $\vec{c}=\{1;-1;-1\}$.

4.4 $A(-1;2;\alpha),\ B(3;4;-6),\ C(1;1;-1).$

5.4 $A(1;0;3),\ B(1;4;1),\ C(0;2;3).$

6.4 $A(-5;6;-1),\ B(6;-5;2),\ C(6;5;1),\ D(0;0;2).$

5

1.5 $\vec{a}=\{3;-5;4\},\ \vec{b}=\{-5;9;-7\},\ \vec{c}_1=-2\vec{a}+3\vec{b},\ \vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

2.5 $\vec{a}=\{2;1;7\},\ \vec{b}=\{2;4;-3\}.$

3.5 $\vec{a}=\{2;-1;1\},\ \vec{b}=\{1;2;3\},\ \vec{c}=\{1;-3;-2\}.$

4.5 $A(-4;-2;0), B(\alpha;-2;4), C(3;-2;1).$

5.5 $A(1;1;0), B(4;1;2), C(1;2;3).$

6.5 $A(2;-5;3), B(3;2;-5), C(5;-3;-2), D(-5;3;-2).$

6

1.6 $\vec{a}=\{1;4;-2\},\ \vec{b}=\{1;1;-1\},\ \vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}.$

2.6 $\vec{a}=\{-4;1;5\},\ \vec{b}=\{1;3;1\}.$

3.6 $\vec{a}=\{3;-1;2\},\ \vec{b}=\{2;-1;-1\},\ \vec{c}=\{4;-2;-2\}.$

4.6 $A(-5;3;-1), B(\alpha;-2;0), C(6;-4;1).$

5.6 $A(-1;4;2), B(5;2;3), C(0;1;2).$

6.6 $A(6;0;4), B(0;6;4), C(4;6;0), D(0;-6;4).$

7

1.7 $\vec{a}=\{1;-2;5\},\ \vec{b}=\{3;-1;6\},\ \vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.7 $\vec{a}=\{3;-1;2\},\ \vec{b}=\{2;3;-1\}.$

3.7 $\vec{a}=\{1;1;-1\},\ \vec{b}=\{7;3;-6\},\ \vec{c}=\{-1;1;9\}.$

4.7 $A(-3;-7;-5), B(0;-\alpha;-2), C(2;3;0)$.

5.7 $A(3;-2;1), B(1;3;2), C(2;4;1)$.

6.7 $A(3;2;4), B(2;4;3), C(4;3;-2), D(-4;-2;-3)$.

8

1.8 $\vec{a}=\{3;5;-1\},\ \vec{b}=\{2;-1;1\},\ \vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b},\ \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.

2.8 $\vec{a}=\{-4;-1;5\},\ \vec{b}=\{1;-3;1\}$.

3.8 $\vec{a}=\{2;-4;9\},\ \vec{b}=\{2;0;-3\},\ \vec{c}=\{7;9;-3\}$.

4.8 $A(2;-4;6), B(0;-2;\alpha), C(2;3;0)$.

5.8 $A(-1;3;-1), B(-3;2;3), C(-1;3;0)$.

6.8 $A(6;3;5), B(5;-6;3), C(3;5;6), D(-6;-1;2)$.

9

1.9 $\vec{a}=\{2;-3;-4\},\ \vec{b}=\{1;0;-5\},\ \vec{c}_1=3\vec{a}-9\vec{b},\ \vec{c}_2=\vec{a}-3\vec{b}$.

2.9 $\vec{a}=\{9;1;2\},\ \vec{b}=\{-1;1;4\}$.

3.9 $\vec{a}=\{1;1;1\},\ \vec{b}=\{1;1;-1\},\ \vec{c}=\{6;0;5\}$.

4.9 $A(0;1;-2), B(3;1;2), C(\alpha;1;1)$.

5.9 $A(1;-1;6), B(4;5;-2), C(-1;3;0)$.

6.9 $A(5;-2;-1), B(4;0;0), C(2;5;1), D(1;2;5)$.

10

1.10 $\vec{a}=\{-1;4;2\},\ \vec{b}\{3;2;-6\},\ \vec{c}_1=2\vec{a}-5\vec{b},\ \vec{c}_2=3\vec{b}+6\vec{a}$.

2.10 $\vec{a}=\{8;2;3\},\ \vec{b}=\{-2;8;0\}$.

3.10 $\vec{a}=\{7;2;3\}, \vec{b}=\{5;-3;2\}, \vec{c}=\{10;-11;5\}$.

4.10 $A(3;3;1), B(1;5;-2), C(4;\alpha;1).$

5.10 $A(7;1;2), B(-5;3;-2), C(3;2;5).$

6.10 $A(4;2;5), B(3;0;4), C(0;2;3), D(5;-2;-4).$

11

1.11 $\vec{a}=\{5;0;-1\},\ \vec{b}=\{7;2;3\},\ \vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{c}_2=3\vec{b}+6\vec{a}.$

2.11 $\vec{a}=\{7;3;4\},\ \vec{b}=\{-1;-1;1\}.$

3.11 $\vec{a}=\{1;2;1\},\ \vec{b}=\{3;-5;3\},\ \vec{c}=\{2;7;1\}.$

4.11 $A(2;1;-1), B(6;-1;5), C(4;2;\alpha).$

5.11 $A(-2;3;-2), B(2;-3;2), C(-1;3;0).$

6.11 $A(4;2;5), B(-3;0;4), C(0;2;3), D(5;2;-4).$

12

1.12 $\vec{a}=\{0;3;-2\},\ \vec{b}=\{1;-2;1\},\ \vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}.$

2.12 $\vec{a}=\{6;-4;2\},\ \vec{b}=\{1;2;7\}.$

3.12 $\vec{a}=\{2;1;-1\},\ \vec{b}=\{3;-5;3\},\ \vec{c}=\{2;-1;3\}.$

4.12 $A(-\alpha;-2;1), B(-4;-2;5), C(-5;-2;2).$

5.12 $A(4;2;-1), B(3;0;4), C(1;2;1).$

6.12 $A(4;4;10), B(7;10;2), C(2;8;4), D(9;6;9).$

13

1.13 $\vec{a}=\{-2;7;1\},\ \vec{b}=\{-3;5;2\},\ \vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b},\ \vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}.$

2.13 $\vec{a}=\{1;-2;3\},\ \vec{b}=\{3;2;-1\}.$

3.13 $\vec{a}=\{1;-1;-1\},\ \vec{b}=\{1;4;2\},\ \vec{c}=\{3;7;3\}.$

4.13 $A(6;\alpha;3), B(6;3;-2), C(7;3;-3).$

5.13 $A(1;2;3), B(-1;2;-3), C(-2;3;1).$

6.13 $A(4;6;5), B(6;9;4), C(2;10;10), D(7;5;9).$

14

1.14 $\vec{a}=\{3;7;0\},\ \vec{b}=\{1;-3;4\},\ \vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.14 $\vec{a}=\{-2;4;1\},\ \vec{b}=\{2;1;0\}.$

3.14 $\vec{a}=\{-7;2;-3\},\ \vec{b}=\{-5;3;2\},\ \vec{c}=\{-10;11;-5\}.$

4.14 $A(0;0;4), B(\alpha;-6;1), C(-5;-10;-1).$

5.14 $A(4;-5;2), B(1;-3;4), C(5;2;-4).$

6.14 $A(3;5;4), B(8;7;4), C(5;10;3), D(4;7;8).$

15

1.15 $\vec{a}=\{-1;2;-1\},\ \vec{b}=\{2;-7;1\},\ \vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{c}_2=\overleftarrow{b}-2\vec{a}.$

2.15 $\vec{a}=\{3;4;1\},\ \vec{b}=\{1;1;7\}.$

3.15 $\vec{a}=\{1;-2;1\},\ \vec{b}=\{-5;3;1\},\ \vec{c}=\{-7;2;1\}.$

4.15 $A(2;-8;-1), B(4;\alpha;0), C(-2;-5;-1).$

5..15 $A(4;4;9), B(7;10;2), C(2;8;4).$

6.15 $A(10;6;5), B(-2;8;4), C(6;8;9), D(7;10;3).$

16

1.16 $\vec{a}=\{7;9;-2\},\ \vec{b}=\{5;4;3\},\ \vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b},\ \vec{c}_2=4\vec{b}-\vec{a}.$

2.16 $\vec{a}=\{-1;4;2\},\ \vec{b}=\{2;2;3\}.$

3.16 $\vec{a}=\{-2;4;-9\},\ \vec{b}=\{-7;3;6\},\ \vec{c}=\{1;1;1\}.$

4.16 $A(3;-6;9), B(0;-3;\alpha), C(9;-12;15).$

5.16 $A(4;6;5), B(6;9;4), C(7;5;9).$

6.16 $A(1;8;2), B(5;2;6), C(5;7;4), D(4;10;9).$

17

1.17 $\vec{a}=\{5;0;-2\},\ \vec{b}=\{6;4;3\},\ \vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b},\ \vec{c}_2=6\vec{b}-10\vec{a}.$

2.17 $\vec{a}=\{-5;1;3\},\ \vec{b}=\{2;1;3\}.$

3.17 $\vec{a}=\{3;4;5\},\ \vec{b}=\{2;1;3\},\ \vec{c}=\{-1;4;3\}.$

4.17 $A(0;2;-4), B(8;2;2), C(\alpha;2;4).$

5.17 $A(3;5;4), B(8;7;4), C(4;7;8).$

6.17 $A(6;6;5), B(4;9;5), C(4;6;11), D(5;9;3).$

18

1.18 $\vec{a}=\{8;3;-1\},\ \vec{b}=\{4;1;3\},\ \vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{c}_2=2\vec{b}-4\vec{a}.$

2.18 $\vec{a}=\{4;3;7\},\ \vec{b}=\{-4;1;3\}.$

3.18 $\vec{a}=\{-5;6;-2\},\ \vec{b}=\{-2;-3;1\},\ \vec{c}=\{2;1;-1\}.$

4.18 $A(3;3;-1), B(5;1;-2), C(4;\alpha;1).$

5.18 $A(10;6;5), B(-2;8;4), C(7;10;3).$

6.18 $A(-3;2;1), B(3;1;-6), C(1;-4;3), D(5;-1;3).$

19

1.19 $\vec{a}=\{3;-1;6\},\ \vec{b}=\{5;7;10\},\ \vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{c}_2=2\vec{b}+4\vec{a}.$

2.19 $\vec{a}=\{-4;2;1\},\ \vec{b}=\{1;-2;1\}.$

3.19 $\vec{a}=\{5;6;1\},\ \vec{b}=\{4;1;1\},\ \vec{c}=\{2;-1;2\}.$

4.19 $A(-4;3;-5), B(0;1;-3), C(2;4;-\alpha).$

5.19 $A(6;3;5), B(8;7;3), C(5;10;4).$

6.19 $A(8;6;4), B(10;5;5), C(5;6;8), D(8;10;-7).$

20

1.20 $\vec{a}=\{1;-2;4\}$, $\vec{b}=\{7;3;5\}$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

2.20 $\vec{a}=\{-6;7;1\}$, $\vec{b}=\{3;2;4\}.$

3.20 $\vec{a}=\{2;-1;4\}$, $\vec{b}=\{4;-1;1\}$, $\vec{c}=\{3;4;1\}.$

4.20 $A(\alpha;-1;0), B(-2;-1;4), C(8;-1;-1).$

5.20 $A(1;8;2), B(5;2;6), C(6;9;3).$

6.20 $A(7;7;3), B(6;5;8), C(3;6;7), D(8;4;1).$

21

1.21 $\vec{a}=\{3;-7;0\}$, $\vec{b}=\{4;-6;1\}$, $\vec{c}_1=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}+7\vec{b}.$

2.21 $\vec{a}=\{6;-7;-1\}$, $\vec{b}=\{2;1;5\}.$

3.21 $\vec{a}=\{-2;-1;4\}$, $\vec{b}=\{-4;1;-1\}$, $\vec{c}=\{1;1;2.\}$

4.21 $A(7;\alpha;2)B(8;1;3), C(6;-1;2).$

5.21 $A(7;2;2), B(5;7;6), C(2;3;7).$

6.21 $A(4;0;0), B(-2;1;2), C(1;3;2), D(3;2;7).$

22

1.22 $\vec{a}=\{2;-6;4\}$, $\vec{b}=\{-3;-7;6\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-5\vec{b}.$

2.22 $\vec{a}=\{3;-3;4\}$, $\vec{b}=\{2;1;-1\}.$

3.22 $\vec{a}=\{2;1;3\}$, $\vec{b}=\{3;-2;1\}$, $\vec{c}=\{4;-2;3\}.$

4.22 $A(2;3;\alpha), B(-1;3;-2), C(3;-7;-3).$

5.22 $A(-5;6;-1), B(2;4;3), C(5;2;-4).$

6.22 $A(-2;1;2), B(4;0;1), C(3;2;7), D(1;3;2).$

23

1.23 $\vec{a}=\{5;-1;2\},\ \vec{b}=\{6;1;-7\},\ \vec{c}_1=3\vec{a}-9\vec{b},\ \vec{c}_2=4\vec{b}+6\vec{a}.$

2.23 $\vec{a}=\{-4;-5;1\},\ \vec{b}=\{2;3;7\}.$

3.23 $\vec{a}=\{-3;1;-4\},\ \vec{b}=\{4;3;1\},\ \vec{c}=\{1;2;2\}.$

4.23 $A(2;2;7), B(\alpha;-1;6), C(-2;5;7).$

5.23 $A(3;2;4), B(-3;1;-2), C(5;-2;3).$

6.23 $A(1;3;2), B(3;2;7), C(4;0;1), D(-2;1;-2).$

24

1.24 $\vec{a}=\{-3;5;-3\},\ \vec{b}=\{6;1;-2\},\ \vec{c}_1=2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}_2=3\vec{a}-5\vec{b}.$

2.24 $\vec{a}=\{-5;4;2\},\ \vec{b}=\{2;-1;1\}.$

3.24 $\vec{a}=\{4;3;-2\},\ \vec{b}=\{-1;2;2\},\ \vec{c}=\{2;2;1\}.$

4.24 $A(-1;2;-3), B(0;\alpha;-2), C(-3;4;-5).$

5.24 $A(5;-2;1), B(4;2;5), C(-1;2;4).$

6.24 $A(3;2;7), B(1;3;2), C(-2;1;3), D(4;-2;3).$

25

1.25 $\vec{a}=\{4;2;9\},\vec{b}=\{0;-1;3\},\vec{c}_1=4\vec{b}-3\vec{a},\vec{c}_2=4\vec{a}-3\vec{b}.$

2.25 $\vec{a}=\{5;-4;2\},\vec{b}=\{3;5;2\}.$

3.25 $\vec{a}=\{3;1;4\},\vec{b}=\{2;1;1\},\vec{c}=\{5;4;3\}.$

4.25 $A(0;3;-6), B(9;3;\alpha), C(12;3;-3).$

5.25 $A(7;5;6), B(-2;-5;2), C(-3;1;0).$

6.25 $A(3;1;-2), B(1;-2;1), C(-2;1;0), D(2;2;5).$

26

1.26 $\vec{a}=\{2;-1;6\},\ \vec{b}=\{-1;3;8\},\ \vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{c}_2=2\vec{a}-5\vec{b}.$

2.26 $\vec{a}=\{5;4;-2\},\ \vec{b}=\{4;4;3\}.$

3.26 $\vec{a}=\{-1;2;1\},\ \vec{b}=\{3;2;-1\},\ \vec{c}=\{-5;6;1\}.$

4.26 $A(3;3;-1), B(5;1;-2), C(\alpha;1;-3).$

5.26 $A(-2;1;2), B(-1;-2;2), C(3;-1;4).$

6.26 $A(1;-2;1), B(3;1;-2), C(2;2;5), D(-2;1;0).$

27

1.27 $\vec{a}=\{5;0;8\},\ \vec{b}=\{-3;1;7\},\ \vec{c}_1=3\vec{a}-4\vec{b},\ \vec{c}=12\vec{b}-9\vec{a}.$

2.27 $\vec{a}=\{7;-3;1\},\ \vec{b}=\{1;1;-4\}.$

3.27 $\vec{a}=\{-1;2;-2\},\ \vec{b}=\{4;5;4\},\ \vec{c}=\{6;5;1\}.$

4.27 $A(-2;1;1), B(2;3;2), C(0;\alpha;3).$

5.27 $A(1;3;2), B(-2;3;2), C(-5;6;8).$

6.27 $A(-3;2;1), B(-2;1;0), C(1;-2;1), D(3;1;2).$

28

1.28 $\vec{a}=\{-1;3;4\},\ \vec{b}=\{2;-1;0\},\ \vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{c}_2=3\vec{b}-5\vec{a}.$

2.28 $\vec{a}=\{9;-5;6\},\ \vec{b}=\{-1;3;-2\}.$

3.28 $\vec{a}=\{2;-1;2\},\ \vec{b}=\{3;3;3\},\ \vec{c}=\{4;5;1\}.$

4.28 $A(6;4;-1), B(2;-3;-5), C(4;3;\alpha)$.

5.28 $A(5;1;-2), B(-4;2;7), C(2;1;-2)$.

6.28 $A(-3;-2;9), B(3;-6;-2), C(2;3;5), D(2;-5;6)$.

29

1.29 $\vec{a}=\{-5;-2;-7\}$, $\vec{b}=\{4;0;-8\}$, $\vec{c}_1=3\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{c}_2=6\vec{b}-7\vec{a}$.

2.29 $\vec{a}=\{-2;2;-7\}$, $\vec{b}=\{2;-2;3\}$.

3.29 $\vec{a}=\{2;1;3\}$, $\vec{b}=\{2;-2;8\}$, $\vec{c}=\{-1;1;-2\}$.

4.29 $A(0;\alpha;-9), B(0;-2;1), C(-1;2;-5)$.

5.29 $A(1;-6;1), B(2;-3;-2), C(-1;3;+2)$.

6.29 $A(3;6;-2), B(2;1;-1), C(4;-2;5), D(-3;2;-1)$.

30

1.30 $\vec{a}=\{-2;0;5\}$, $\vec{b}=\{-1;3;4\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-6\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}+6\vec{b}$.

2.30 $\vec{a}=\{3;-4;-6\}$, $\vec{b}=\{1;-2;-1\}$.

3.30 $\vec{a}=\{-2;1;-4\}$, $\vec{b}=\{1;1;-2\}$, $\vec{c}=\{-1;-2;3\}$.

4.30 $A(4;2;-5), B(-1;\alpha;-7), C(-3;10;-4)$.

5.30 $A(2;-1;3), B(1;-7;1), C(-6;4;7)$.

6.30 $A(2;+1;-5), B(-2;9;-5), C(-3;4;1), D(3;+2;-1)$.

Аналитикалық геометрия

1-есеп. ***Берілгені бойынша***

1) M_1 нүктесі арқылы OX өсімен φ бұрыш жасап;

2) M_1 мен M_2 нүктелері арқылы;

3) M_1 нүктесі арқылы $\overline{S}$ векторына параллель;

4) M_2 нүктесі арқылы $\overline{n}$ векторына перпендикуляр;

5) M_1 нүктесі арқылы L_1 түзуіне параллель

6) M_2 нүктесі арқылы L_2 түзуіне перпендикуляр;

өтетін түзулердің жалпы теңдеуін жазу керек.

7) M_1 нүктесінен L_2 түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

8) 5) пен 6) түзулерінің қиылысу нүктесін және олардың арасындағы бұрышты табу керек.

2-есеп. Поляр координаттарымен берілген сызықты h адымына сәйкес нүктелер бойынша салу керек:

3-есеп. АВСД тетраэдрінің төбелерінің координаттары берілген.

1) (АВС) жазықтығының теңдеуін жазу керек.

2) (АВС) параллель Д арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек.

3) АД қабырғасының канондық және параметрлік теңдеулерін жазу керек.

4) Тетраэдрдің ДЕ биіктігі арқылы өтетін түзудің канондық теңдеуін жазу керек.

5) АД мен ДЕ арасындағы бұрышты табу керек.

6) АВС үшбұрышының ауданын табу керек.

7) Тетраэдрдің көлемін табу керек.

8) ДЕ биіктігінің ұзындығын табу керек.

9) Е нүктесінің координаттарын табу керек.

1

1-есеп. Берілгені: $M_1(4; -2)$; $M_2(5; 5)$; $\varphi = 30^0$; $\overline{S} = (3; 7)$;

$\overline{n} = (4; 1)$; L_1: $2x - y + 3 = 0$; L_2: $x - 3y + 1 = 0$.

2-есеп. $r = 2\cos\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(3; -1; 0), B(5; -1; 2), C(4; 1; 0), Д(2; 2; 7).

2

1-есеп. Берілгені: $M_1(-2; 2)$; $M_2(2; 6)$; φ= 45^0 ; $\overline{S}$ = (5; -3);

$\overline{n}$ = (7; 2); L_1: $x - 3y - 7 = 0$; L_2: $x + 3y + 5 = 0$.

2-есеп. $r = \cos 2\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{8}$.

3-есеп. A(1; 3; 2), B(-5; 0; 10), C(4; 9; -2), Д(7; -1; 4).

3

1-есеп. Берілгені: $M_1(-2; -2)$; $M_2(4; 2)$; φ= 60^0 ; $\overline{S}$ = (3; 7);

$\overline{n}$ = (2; -5); L_1: $x - 4y + 6 = 0$; L_2: $2x + 3y + 1 = 0$.

2-есеп. $r = 2 + \cos\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(1; 2; -4), B(-3; 0; 5), C(0; 2; -1), Д(4; 1; 1).

4

1-есеп. Берілгені: $M_1(-1; 0)$; $M_2(-4; -1)$; φ= 120^0 ; $\overline{S}$ = (2; -7);

$\overline{n}$ = (3; 4); L_1: $3x - y - 5 = 0$; L_2: $x - y + 7 = 0$.

2-есеп. $r = 1 + \cos 2\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{8}$.

3-есеп. A(5; 3; 3), B(7; 3; 5), C(4; 1; 3), Д(-2; 0; 6).

5

1-есеп. Берілгені: $M_1(3; 1)$; $M_2(1; 5)$; φ= 145^0 ; $\overline{S}$ = (8; 5);

$\overline{n}$ = (7; -1); L_1: $x - 3y - 7 = 0$; L_2: $2x + 3y + 4 = 0$.

2-есеп. $r = 1 - 2\cos\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(2; 4; 8), B(-1; -2; 12), C(8; 7; 0), Д(4; 3; 1).

6

1-есеп. Берілгені: $M_1(0;\ -1)$; $M_2(4;\ -3)$; $\varphi = 150^0$; $\overline{S} = (3;\ -4)$; $\overline{n} = (2;\ 5)$; L_1: $x - y + 7 = 0$; L_2: $x - 5y + 2 = 0$.

2-есеп. $r = 4\sin\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. А(-3; 7; 0), В(-2; 7; -3), С(1; 9; -9), Д(0; 1; 1).

7

1-есеп. Берілгені: $M_1(3;\ 2)$; $M_2(-2;\ 4)$; $\varphi = 30^0$; $\overline{S} = (5;\ 3)$; $\overline{n} = (6;\ 7)$; L_1: $4x - y + 3 = 0$; L_2: $2x - 3y - 4 = 0$.

2-есеп. $r = \sin 3\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{12}$.

3-есеп. А(-1; 3; 2), В(0; 3; 3), С(1; 7; 2), Д(-5; 4; -2).

8

1-есеп. Берілгені: $M_1(2;\ 1)$; $M_2(-4;\ 2)$; $\varphi = 45^0$; $\overline{S} = (7;\ 5)$; $\overline{n} = (2;\ -7)$; L_1: $x + y + 6 = 0$; L_2: $3x + 2y - 2 = 0$.

2-есеп. $r = 3 + \sin\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. А(-6; -6; 6), В(-3; 0; 2), С(0; -3; -2), Д(3; 3; 3).

9

1-есеп. Берілгені: $M_1(-2;\ 6)$; $M_2(2;\ -2)$; $\varphi = 60^0$; $\overline{S} = (8;\ 7)$; $\overline{n} = (-3;\ 4)$; L_1: $x + 2y + 3 = 0$; L_2: $2x + 5y - 4 = 0$.

2-есеп. $r = 1 + \sin 3\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{12}$.

3-есеп. А(1; 2; -1), В(5; 4; -10), С(0; 2; 2), Д(7; 1; -1).

10

1-есеп. Берілгені: $M_1(6;\ -1)$; $M_2(-2;\ 2)$; $\varphi = 120^0$; $\overline{S} = (3;\ -7)$; $\overline{n} = (3;\ 5)$; L_1: $3x+2y+1=0$; L_2: $4x+3y-2=0$.

2-есеп. $r = 1 + 3\sin\varphi$, h=$\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. А(-3; 1; -1), В(-1; 1; 1), С(-1; 5; -1), Д(4; 3; 6).

11

1-есеп. Берілгені: $M_1(1;\ -3)$; $M_2(2;\ 4)$; $\varphi = 30^0$; $\overline{S} = (2;\ 5)$; $\overline{n} = (3;\ 1)$; $L_1:\ x-2y+3=0$; $L_2:\ 2x-y+1=0$;

2-есеп. $r = \cos\varphi$, h=$\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. А(2; 1; 0), В(3; -1; 1), С(3; 1; 0), Д(1; 2; 7).

12

1-есеп. Берілгені: $M_1(-1;\ 2)$; $M_2(3;\ 6)$; $\varphi = 45^0$; $\overline{S} = (3;\ -3)$; $\overline{n} = (5;\ 2)$; L_1: $x-3y-7=0$; L_2: $x+3y+5=0$.

2-есеп. $r = 2\cos 2\varphi$, h=$\dfrac{\pi}{8}$.

3-есеп. А(-1; 2; 2), В(-3; 0; 10), С(1; 9; -2), Д(6; -1; 4).

13

1-есеп. Берілгені: $M_1(-3;\ -1)$; $M_2(4;\ 2)$; $\varphi = 60^0$; $\overline{S} = (3;\ 7)$; $\overline{n} = (1;\ -5)$; $L_1:\ x-3y+6=0$; ; L_2: $2x+3y+1=0$.

2-есеп. $r = 1+\cos\varphi$, h=$\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. А(2; 1; -4), В(-3; 0; 5), С(0; 2; -1), Д(4; 1; 1).

14

1-есеп. Берілгені: $M_1(-2;\ 0)$; $M_2(-1;\ -1)$; $\varphi = 120^0$; $\overline{S} = (2;\ -7)$; $\overline{n} = (2;\ 4)$; $L_1:\ x-3y-5=0$; L_2: $x-y+7=0$.

2-есеп. $r = 1 + \cos 2\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{8}$.

3-есеп. A(2; 3; 3), B(7; 5; 5), C(3; 1; 3), Д(-2; 0; 6).

15

1-есеп. Берілгені: $M_1(2; 1)$; $M_2(1; 5)$; φ= 145^0 ; $\overline{S}$ = (8; 5); $\overline{n}$ = (4; -1); $L_1: \ x - y - 7 = 0$; L_2: $2x + 3y + 4 = 0$.

2-есеп. $r = 1 - \cos\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(2; 4; 8), B(-1; -2; 12), C(8; 7; 0), Д(4; 3; 1).

16

1-есеп. Берілгені: $M_1(1; -1)$; $M_2(2; -3)$; φ= 150^0 ; $\overline{S}$ = (3; -4); $\overline{n}$ = (3; 5); $L_1: \ 2x - y + 7 = 0$; L_2: $x - 5y + 2 = 0$.

2-есеп. $r = 2\sin\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(-1; 7; 0), B(-4; 7; -3), C(2; 9; -9), Д(0; 1; 1).

17

1-есеп. Берілгені: $M_1(5; 2)$; $M_2(-1; 4)$; φ= 30^0 ; $\overline{S}$ = (5; 3); $\overline{n}$ = (5; 7); $L_1: \ x - 2y + 3 = 0$; L_2: $2x - 3y - 4 = 0$.

2-есеп. $r = 2\sin\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{12}$.

3-есеп. A(-2; 3; 2), B(0; 1; 3), C(1; 5; 2), Д(-5; 2; -2).

18

1-есеп. Берілгені: $M_1(3; 1)$; $M_2(-3; 2)$; φ= 45^0 ; $\overline{S}$ = (7; 5); $\overline{n}$ = (3; -7 $L_1: \ x + 2y + 6 = 0$; L_2: $3x + 2y - 2 = 0$.

2-есеп. $r = 1 + \sin\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(-5; -5; 6), B(-4; 0; 2), C(0; -3; -2), Д(3; 3; 3).

19

1-есеп. Берілгені: M_1(-3; 6); M_2(1; -2); φ= 60^0 ; $\overline{S}$ = (8; 7); $\overline{n}$ = (-2; 4); $L_1:\ 2x+y+3=0$; L_2: $2x+5y-4=0$.

2-есеп. $r=\sin 3\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{12}$.

3-есеп. A(-1; 2; -1), B(3; 4; -10), C(0; 2; 2), Д(7; 1; -1).

20

1-есеп. Берілгені: M_1(4; -1); M_2(-3; 2); φ= 120^0 ; $\overline{S}$ = (3; -7); $\overline{n}$ = (1; 5); $L_1:\ x+2y+1=0$; L_2: $4x+3y-2=0$.

2-есеп. $r=1+2\sin\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(-4; 1; -1), B(-1; 3; 1), C(-1; 5; -1), Д(4; 3; 6).

21

1-есеп. Берілгені: M_1(4; -3); M_2(5; 4); φ= 30^0 ; $\overline{S}$ = (3; 7); $\overline{n}$ = (4; 2); $L_1:\ x-4y+3=0$; L_2: $x-3y+1=0$.

2-есеп. $r=5\cos\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(7; -1; 0), B(5; -1; 2), C(2; 1; 0), Д(2; 1; 7).

22

1-есеп. Берілгені: M_1(-3; 2); M_2(2; 4); φ= 45^0 ; $\overline{S}$ = (5; -3); $\overline{n}$ = (4; 2); L_1: $x-3y-7=0$; $L_2:\ 2x+y+5=0$;

2-есеп. $r=2\cos 2\varphi$, h= $\dfrac{\pi}{8}$.

3-есеп. A(5; 3; 2), B(-5; 0; 10), C(4; 7; -2), Д(7; -1; 4).

23

1-есеп. Берілгені: $M_1(-4; -2)$; $M_2(4; 2)$; $\varphi = 60^0$; $\overline{S} = (1; 7)$;
$\overline{n} = (-2; -5)$; $L_1: \ x - y + 6 = 0$; L_2: $2x + 3y + 1 = 0$.

2-есеп. $r = 1 + \cos\varphi$, h=$\frac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(-1; 2; -4), B(-3; 0; -5), C(0; 2; -1), Д(-4; 1; 1).

24

1-есеп. Берілгені: $M_1(-4; 0)$; $M_2(-4; -2)$; $\varphi = 120^0$; $\overline{S} = (2; -7)$;
$\overline{n} = (4; 4)$; $L_1: \ 3x - 2y - 5 = 0$; L_2: $x - y + 7 = 0$.

2-есеп. $r = 1 + \cos 2\varphi$, h=$\frac{\pi}{8}$.

3-есеп. A(5; 3; 3), B(7; 3; 5), C(4; 1; 3), Д(-2; 0; 6).

25

1-есеп. Берілгені: $M_1(3; 6)$; $M_2(1; 4)$; $\varphi = 145^0$; $\overline{S} = (8; 5)$;
$\overline{n} = (5; -1)$; $L_1: \ x - 2y - 7 = 0$; L_2: $2x + 3y + 4 = 0$.

2-есеп. $r = 1 - 2\cos\varphi$, h=$\frac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(2; 4; 8), B(-1; -2; 12), C(8; 7; 0), Д(4; 3; 1).

26

1-есеп. Берілгені: $M_1(1; -1)$; $M_2(1; -3)$; $\varphi = 150^0$; $\overline{S} = (3; -4)$;
$\overline{n} = (2; 3)$; $L_1: \ x - 2y + 7 = 0$; L_2: $x - 5y + 2 = 0$.

2-есеп. $r = 2\sin\varphi$, h=$\frac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(-3; 5; 0), B(-2; 7; -1), C(1; 3; -9), Д(0; 1; 1).

27

1-есеп. Берілгені: $M_1(1; 2)$; $M_2(-2; 1)$; $\varphi = 30^0$; $\overline{S} = (5; 3)$;
$\overline{n} = (6; 5)$; $L_1: \ 2x - y + 3 = 0$; L_2: $2x - 3y - 4 = 0$.

2-есеп. $r = \sin 2\varphi$, h= $\frac{\pi}{12}$.

3-есеп. A(-1; 4; 2), B(0; 3; 4), C(1; 5; 2), Д(-5; 4; -2).

28

1-есеп. Берілгені: M_1(-2; 1); M_2(-4; 1); φ= 45^0 ; $\overline{S}$ = (7; 5); $\overline{n}$ = (2; -7); L_1: $x + y + 6 = 0$; L_2: $3x + 2y - 2 = 0$.

2-есеп. $r = 2 + \sin\varphi$, h= $\frac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(-6; -4; 6), B(-1; 0; 2), C(0; -3; -2), Д(4; 3; 3).

29

1-есеп. Берілгені: M_1(-2; 4); M_2(3; -2); φ= 60^0 ; $\overline{S}$ = (8; 7); $\overline{n}$ = (-3; 2); L_1: $x + 2y + 3 = 0$; L_2: $2x + 5y - 4 = 0$.

2-есеп. $r = 1 + 2\sin 3\varphi$, h= $\frac{\pi}{12}$.

3-есеп. A(1; -2; -1), B(3; 4; -10), C(0; 2; 1), Д(7; 1; -1).

30

1-есеп. Берілгені: M_1(4; -1); M_2(-2; 3); φ= 120^0 ; $\overline{S}$ = (3; -7); $\overline{n}$ = (1; 5); L_1 : $3x + y + 1 = 0$; L_2 : $4x + y - 2 = 0$;

2-есеп. $r = 1 + 4\sin\varphi$, h= $\frac{\pi}{6}$.

3-есеп. A(-4; 1; -1), B(-1; 1; 2), C(-1; 3; -1), Д(1; 3; 6).

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТ

1. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.– М.: Наука, 1980.
2. Қ.Ж.Наурызбаев, М.Е.Берікханова. Жоғары математика есептері.–Алматы: Қазақ университеті, 1-дәптер. 2000.
3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс), «Иль-Тех-Кітап», 2003.
4. Н.В.Ефимов. Квадратичные формы и матрицы. Изд. «Наука»,Москва 1975.
5. А.П.Рябушко и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике, Ч.1, Минск «Вышэйшая школа» 1990.
6. Қазақша-орысша, орысша-қазақша терминологиялық сөздік: Математика, – «Рауан» баспасы, Алматы 1999.
7. Айдос Е.Ж., Балықбаев Т.О. Математика пәні бойынша жоғары оқу орындарына түсушілерге арналған оқу құралы, ЖШС РПБК «Дәуір», 459 б., Алматы 2006.

Мазмұны

Еркара Жолдыбайұлы
Айдос

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА-I

ISBN 978-601-281-137-7 (к.1)
ISBN 978-601-281-163-0

Басуға 2015 жылы қол қойылды.
Форматы 60х84 1/16. Көлемі 20 баспа табақ.
Times гарнитурасы. Офсеттік басылым.
Тапсырыс № 293. Тиражы – 1000 дана.

«Бастау» баспасы (тел. 279-49-53, 279-97-32).
Мемлекеттік лицензия – № 0000036
ҚР Білім және ғылым министрлігі.
ҚР Ұлттық мемлекеттік кітап палатасының
халықаралық код беру туралы №155 – 978-601-281 сертификаты.
Алматы қаласы, Сейфуллин даңғылы, 458/460-95.

«Полиграфсервис» ЖШС-і баспаханасында басылды (тел. 233-32-53).
Алматы қаласы, 050050, Зеленая көшесі, 13-а.

ISBN 978-601-281-137-7
9 786012 811377

Қосымша жазулар жазу үшін

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Қосымша жазулар жазу үшін

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....